S V E U Č I L I Š T E U Z A G R E B U
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE - ZAGREB

JURAJ JUSTINIJANOVIĆ

NACRTNA GEOMETRIJA

I

ZAGREB, 1970.

11447

S V E U Č I L I Š T E U Z A G R E B U

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE - ZAGREB

JURAJ JUSTINIJANOVIĆ

NACRTNA GEOMETRIJA

I

ZAGREB, 1970.

Odobrenje Komisije za izdavačku djelatnost Skupštine Sveučilišta u Zagrebu
Broj 02–1120/1–1980.

Cijena za studente Sveučilišta u Zagrebu
Din 90.–

Tisak: Sveučilišna naklada Liber – Zagreb, Trg maršala Tita 14
Broj 1167/SL

SADRŽAJ

UVOD

Strana

O nacrtnoj ili deskriptivnoj geometriji ---------- 1
Oznake i kratice ---------- 1

I. NORMALNO PROJICIRANJE NA DVIJE RAVNINE TOČKE, DUŽINE, PRAVCA I RAVNINE

1. Projiciranje točke

1. Tlocrt i nacrt točke ---------- 2
2. Pridružene ravnine projekcija i njihovo prelaganje ---------- 3
3. Odredjivanje položaja točke u prostoru pomoću njezinih projekcija ---- 3
4. Točke u osobitom položaju ---------- 4
5. Kvadranti ---------- 5
6. Koordinate točke ---------- 6
7. Odredjivanje položaja točke u kvadrantima pomoću njezinih projekcija 6
8. Točka u ravnini simetrije, odnosno koincidencije ---------- 6
9. Vježbe ---------- 7

2. Projiciranje dužine

10. Dužina je usporedna s ravninama projekcija ---------- 7
11. Kotiranje ---------- 8
12. Dužina je okomita na jednoj ravnini projekcija ---------- 9
13. Dužina je u jednoj ravnini projekcija ---------- 9
14. Dužina je usporedna s tlocrtom ---------- 10
15. Dužina je usporedna s nacrtom ---------- 10
16. Dužina je u općenitom položaju ---------- 11
17. Prava veličina dužine ---------- 12
18. Odredjivanje prave veličine greda tronoga [1] ---------- 14
19. Vježbe ---------- 14

3. Projiciranje pravca

20. Probodište i prikloni kutevi pravca ---------- 16
21. Odredjivanje položaja točke na zadanoj zraci ---------- 18
22. Ukršteni pravci ---------- 19
23. Usporedni pravci ---------- 20
24. Mimoilazni pravci ---------- 20
25. Vježbe ---------- 21

4. Projiciranje ravnine

26. Odredjenost ravnine ---------- 21
27. Predočivanje ravnine s dva ukrštena, odnosno usporedna pravca ---------- 22
28. Predočivanje ravnine tragovima ---------- 23
29. Predočivanje ravnine, koje su u osobitim položajima prema π_1 i π_2 --- 24
30. Koordinate ravnine ---------- 28
31. Vježbe ---------- 29

---

1) Budući da na pisaćem stroju nije bilo slova "đ", upotrebljena su slova "dj" za slovo "đ".

5. Točke, pravci i ravnine u medjusobnim položajnim odnosima

Strana

32. Točka, pravac i ravan lik u općoj ravnini ---- 30
33. Sutražnice i njihova upotreba ---- 32
34. Konstrukcija tragova i sutražnica ravnine zadane točkama i pravcima ---- 35
35. Dvije ravnine i njihova presječnica ---- 37
36. Probodište ravnine s pravcem ---- 43
37. Rezultanta triju sila i tri komponente sile ---- 48
38. Presječnica paralelograma i trokuta ---- 50
39. Presječnica ravnine trokuta s ravninom koincidencije ---- 51
Afinitet u ravnini
40. Vježbe ---- 53

6. Osnovni metrički zadaci

41. Podjela osnovnih geometrijskih zadataka ---- 55
42. Projiciranje pravog kuta ---- 55
43. Okomitost pravca i ravnine ---- 55
44. Udaljenost točke od ravnine ---- 57
45. Priklonice i prikloni kutovi ravnine ---- 57
46. Okretanje ili rotacija točke oko pravca ---- 58
47. Okretanje ili rotacija dužine oko pravca ---- 62
48. Prelaganje ravnine ---- 63
49. Udaljenost točke od pravca ---- 69
50. Kut dvaju pravaca ---- 70
51. Prikloni kut pravca prema ravnini ---- 71
52. Prikloni kut dviju ravnina ---- 71
53. Vježbe ---- 73

II. NORMALNO PROJICIRANJE NA TRI I VIŠE RAVNINA TOČKE, DUŽINE, PRAVCA I RAVNINE

7. Bokocrt

54. Točka ---- 74
55. Oktanti ---- 76
56. Dužina ---- 79
57. Pravac ---- 79
58. Ravnina ---- 80
59. Treća projicirajuća ravnina ---- 84
60. Vježbe ---- 88

8. Stranocrt

61. O stranocrtu ---- 88
62. Stranocrt točke ---- 89
63. Stranocrt dužine ---- 92
64. Stranocrt ravnine ---- 92
65. Primjene stranocrta ---- 94
66. Vježbe ---- 97

III. NORMALNO PROJICIRANJE RAVNIH LIKOVA

9. Ravan lik u projicirajućoj, odnosno u općoj ravnini

Strana

67. Određivanje prave veličine lika, koji je u projicirajućoj ravnini ... 98
68. Konstruiranje projekcija lika, koji je u projicirajućoj ravnini ... 102
69. Određivanje prave veličine lika, koji je u općoj ravnini ... 104
70. Konstruiranje projekcija lika, koji je u općoj ravnini ... 107
71. Paralelne projekcije i preložaj ravnog lika ... 108
72. Vježbe ... 110

10. Projiciranje kružnice

73. Kružni luk određen točkama ... 110
74. Rektifikacija kružnice i kružnog luka ... 111
75. Normalna projekcija kružnice ... 113
76. Elipsa i neke njezine konstrukcije ... 115
77. Projekcije kružnice, koja je u projicirajućoj ravnini ... 121
78. Konjugirani ili pridruženi promjeri elipse ... 124
79. Projekcije kružnice, koja je u općoj ravnini ... 128
80. Vježbe ... 130

IV. NORMALNO PROJICIRANJE GEOMETRIJSKIH TIJELA

11. Projiciranje prizme

81. O prizmi ... 131
82. Općenito o projiciranju uglastog tijela ... 132
83. Kvadar i njegova mreža ... 132
84. Pravilna četverostrana prizma s kvadratskom prizmatičnom šupljinom ... 134
85. Kosa trostrana prizma ... 134
86. Pravilna peterostrana prizma, kojoj su osnovke okomite na ravnini π_1 ... 136
87. Pravilna četverostrana prizma, kojoj je osnovka u općoj ravnini ... 137
88. Bokocrt i stranocrt prizmatičnog predmeta ... 138
89. Vježbe ... 140

12. Projiciranje piramide

90. O piramidi ... 142
91. Pravilna trostrana piramida i njezina mreža ... 142
92. Uspravna četverostrana piramida i njezina mreža ... 144
93. Kosa četverostrana piramida i njezina mreža ... 145
94. Kvadratična krnja piramida i mreža njezinog pobočja ... 147
95. Pravilna šesterostrana piramida, kojoj je osnovka u trećoj projicirajućoj ravnini ... 148
96. Kvadratična piramida, kojoj je osnovka u općoj ravnini ... 149
97. Bokocrt i stranocrt predmeta, koji je sastavljen od prizama i krnje piramide ... 151
98. Vježbe ... 152

13. Projiciranje valjka

99. O valjku ... 155

Strana

100. Rotacioni valjak i njegova mreža ... 15
101. Eliptična, paraboličnа i hiperboličnа valjkasta ploha ... 15
102. Kosi kružni valjak ... 15
103. Rotacioni valjak, kojemu je os usporedna s π_2 ... 15
104. Rotacioni valjak, kojemu je osnovka u općoj ravnini ... 16
105. Složeni valjkasti predmeti ... 16
106. Vježbe ... 16

14. Projiciranje stošca

107. O stošcu ... 163
108. Rotacioni stožac i njegova mreža ... 164
109. Kosi kružni stožac i njegova mreža ... 166
110. Polovina šupljeg stošca ... 169
111. Krnji rotacioni stožac i njegova mreža ... 170
112. Rotacioni stožac, kojemu je osnovka u općoj ravnini ... 171
113. Predmeti s valjkastim i stožastim plohama ... 172
114. Vježbe ... 173

15. Projiciranje kugle

115. O kugli ... 175
116. Projekcije kugle ... 176
117. Točke kugline plohe ... 176
118. Meridijani kugle ... 177
119. Mreža kugle ... 178
120. Predmeti s kuglastom plohom ... 179
121. Vježbe ... 180

16. Projiciranje rotacione plohe

122. O rotacionoj plohi ... 181
123. Projekcije rotacione plohe ... 181
124. Rotacione plohe drugog reda ... 182
125. Prstenasta ploha ... 186
126. Predmeti s prstenastim plohama ... 187
127. Vježbe ... 188

U V O D

O nacrtnoj ili deskriptivnoj geometriji

Kad tehničar zamisli neki objekt, on ga ne opisuje riječima, već ga prikazuje crtežima. Pomoću tih crteža mogu se tehničari lako sporazumjeti i onda, kad jedan ne razumije jezik drugoga. Nauka, koja je dala tehničarima sredstvo za medjusobno sporazumijevanje, zove se n a c r t n a g e o m e t r i j a. Ona je iznikla u tehničkom svijetu i dugo je služila tehničkim potrebama, a da nije bila ni zapažena. Tek je pri kraju 18. vijeka uspio G a s p a r d M o n g e[1] / Gaspar Monž / izlučiti čiste geometrijske elemente iz njihovih raznolikih aplikatornih područja i stopiti ih u novu nauku. U svojem prvom udžbeniku nacrtne geometrije iz godine 1789. Monge je postavio ove zadatke nacrtnoj geometriji:

"Prvo, ona treba dati metode po kojima se na crtaćem papiru, koji ima samo dvije dimenzije, duljinu i širinu, mogu prikazati sve prostorne tvorevine, koje imaju tri dimenzije, duljinu, širinu i visinu, a uz pretpostavku da se te tvorevine mogu točno definirati.

Drugo, ona treba dati postupak, po kojemu se iz točnog crteža neke prostorne tvorevine može upoznati njezin oblik, te mogu izvesti svi zakoni, koji izlaze iz oblika i medjusobnog položaja njezinih djelova."

Ima više metoda, po kojima se prostorni objekti mogu točno prikazati crtežima, a od tih metoda bit će u ovom udžbeniku samo one, koje se u strojarstvu i elektrotehnici najviše primjenjuju. *obrađene*

Oznake i kratice

U ovom udžbeniku upotrebljavat ćemo ove oznake i kratice:

$//$ = usporedan, $\#$ = usporedan i jednak,
$\perp$ = okomit , $\sphericalangle$ = pravi kut.
AB = dužina, kojoj su krajnje točke A i B.
$\overline{AB}$ = duljina dužine, kojoj su krajnje točke A i B.
$\overset{\frown}{AB}$ = luk kružnice, kojemu su krajnje točke A i B.
$\overline{Ab}$ = udaljenost točke A od pravca b.
$\overline{A\Gamma}$ = udaljenost točke A od ravnine Γ .
$\sphericalangle ABC$ = kut, kojemu je tjeme B, a kraci BA i BC.
$\sphericalangle ab$ = kut, koji čine pravci a i b.
$\sphericalangle \Gamma\Delta$ = kut, koji čine ravnine Γ i Δ .
$(A\ B)$ = pravac položen ili odredjen točkama A i B.
(ABC) = ravnina položena ili odredjena točkama A, B i C.
(ab) = ravnina položena ili odredjena pravcima a i b.
$(a\ B)$ = ravnina položena ili odredjena pravcem a i točkom B.
$\{a\ b\}$ = točka, u kojoj se sijeku pravci a i b.
$\{a\ \Gamma\}$ = točka u kojoj pravac a probada ravninu Γ .
$\{\Gamma\Delta\ E\}$ = točka, u kojoj se sijeku ravnine Γ , Δ i E.
$(\Gamma\Delta)$ = pravac, u kojem se sijeku ravnine Γ i Δ.

Uglaste zagrade upotrebili smo u tim oznakama kao znak spajanja dvaju osnovnih geometrijskih tvorevina trećom, a oble zagrade kao znak siječenja dviju osnovnih geometrijskih tvorevina u trećoj.

Oznaka St. pred rednim brojem članka označuje to, da je nastavno gradivo, koje je obradjeno u tom članku, namijenjeno samo studentima Strojarsko-brodogradjevnog fakulteta.

1/ Rodjen 1746. u Beaune, umro 1818. u Parizu.

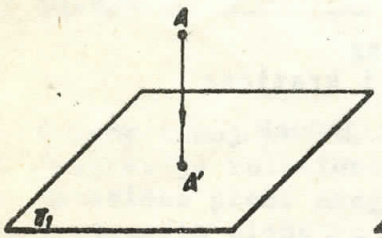
I. NORMALNO PROJICIRANJE NA DVIJE RAVNINE TOČKE, DUŽINE, PRAVCA I RAVNINE

§ 1. PROJICIRANJE TOČKE

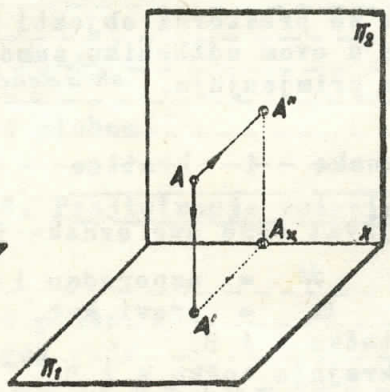
1. Tlocrt i nacrt točke. Kad s točke A (sl.1), koja je iznad horizontalne ravnine Π_1, spustiš okomicu na tu ravninu, pa odrediš njezino nožište A' (čitaj: A crtica), dobiješ normalnu ili ortogonalnu projekciju točke A na Π_1, koja se zove tlocrt ili prva projekcija točke A.

Tlocrt ili prva projekcija točke A jest nožište A' okomice spuštene s te točke na horizontalnu ravninu Π_1.

Okomica spuštena s točke A na Π_1 zove se prva zraka projiciranja, a ravninu Π_1 nazivamo ravninom tlocrta ili prvih projekcija. Kad crtaš na papiru, koji je na horizontalnom stolu ili klupi, uzmi da je ravnina papira u isto vrijeme i ravnina tlocrta ili prvih projekcija.



Sl. 1.



Sl. 2.

Ako je zadan tlocrt A' točke A, da li je time određen položaj te točke u prostoru? Iz tlocrta A' točke A možeš zaključiti samo to, da se ta točka nalazi negdje na zraci, koja iz točke A' ide okomito na ravninu Π_1, ali ne znaš koliko je ta točka udaljena od Π_1, jer svaka točka te zrake ima svoj tlocrt u točki A'. Samim tlocrtom nije dakle određen položaj točke u prostoru. Visinu točke A nad Π_1 možeš odrediti tako, da horizontalnoj ravnini Π_1 dodaš vertikalnu ravninu Π_2 (sl.2.), pa da točku A normalno projiciraš na tu ravninu. Normalna projekcija A'' (čitaj: A dvije crtice) točke A na vertikalnoj ravnini Π_2 zove se nacrt ili druga projekcija točke A.

Nacrt ili druga projekcija točke A jest nožište A'' okomice, spuštene s točke na vertikalnu ravninu Π_2.

Okomica spuštena s točke A na Π_2 zove se druga zraka projiciranja, a ravninu Π_2 nazivamo ravninom nacrta ili drugih projekcija. Pravac, u kojem se sijeku ravnine Π_1 i Π_2 zove se os x. Zrake AA' i AA'' određuju ravninu koja je okomita na Π_1, na Π_2 i na osi x. Ta ravnina siječe Π_1 u pravcu $A'A_x$, Π_2 u pravcu $A''A_x$, a os x u točki A_x. Iz pravokutnika $AA'A_xA''$ izlazi da je

$$A'A = A_xA'' \quad \text{i} \quad A''A = A_xA'.$$

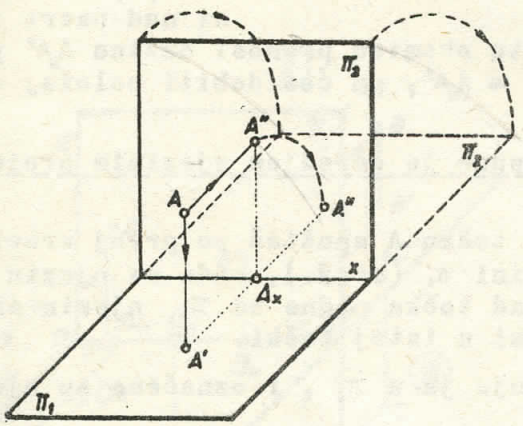
Visina točke nad Π_1 jednaka je udaljenosti njezina nacrta od osi x, a daljina točke od Π_2 jednaka je udaljenosti njezina tlocrta od osi x.

Kad je uz tlocrt A' točke A zadan i njezin nacrt A", tad možeš njezin položaj u prostoru naći tako, da u točki A' uzdigneš okomicu na Π_1, a u točki A" postaviš okomicu na Π_2, pa će se te okomice sjeći u točki A.

Položaj u prostoru neke točke potpuno je odredjen tlocrtom i nacrtom te točke.

2. Pridružene ravnine projekcija i njihovo prelaganje. Horizontalna ravnina Π_1 (sl.3.), na kojoj je tlocrt točke A, i vertikalna ravnina Π_2, na kojoj je nacrt iste točke, zovu se pridružene ravnine projekcija.

Budući da nije spretno držati ravninu nacrta Π_2 u vertikalnom položaju i na njoj crtati, to ćemo tu ravninu skupa s nacrtom A" točke A preložiti na ravninu Π_1 okretanjem oko osi x u smjeru, koji je na slici označen strelicama. Nakon završenog prelaganja doći će Π_2 u novi položaj, koji je na istoj slici ograničen crticama. Pri tom prelaganju ravnine Π_2 na ravninu Π_1 ostat će tlocrt A' točke A na istom mjestu ispod osi x, dok će njezin nacrt A" doći skupa sa Π_2 povrh osi x.



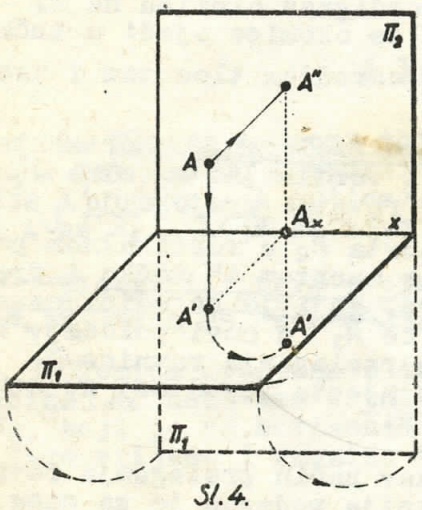
Sl. 3.

Takav način prelaganja ravnina projekcija podesan je za onog crtača, kojemu je ravnina crtaćeg papira horizontalna, t.j. kojemu se ravnina crtnje poklapa s Π_1, jer on na taj način preloži ravninu Π_2 na svoju ravninu crtnje. Za onog crtača, kojemu se ravnina crtnje poklapa sa Π_1, na pr. za crtača, koji crta na školskoj ploči, bit će podesnije da to prelaganje izvede na drugi način.

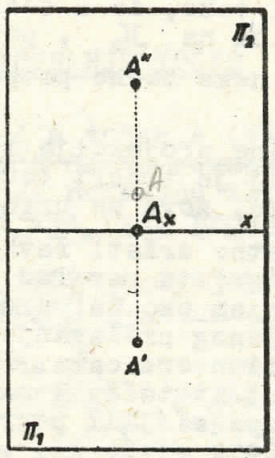
On će horizontalnu ravninu Π_1 skupa s tlocrtom A' točke A (sl.4) preložiti na ravninu Π_2 okretanjem oko osi x u smjeru, koji je na slici označen strelicama. Nakon prelaganja zauzet će ravnina Π_1 onaj položaj, koji je na toj slici ograničen crticama. Pri takvom prelaganju ravnine Π_1 na ravninu Π_2 ostaje nacrt A" točke A na istom mjestu povrh osi x, dok će njezin tlocrt A' doći skupa sa Π_1 ispod osi x.

Nakon prelaganja jedne ravnine projekcija na drugu (sl.5.) izvedenog na prvi ili drugi način, pravit će dužine AA' i AA" dužinu A'A", koja je okomita na osi x, jer su dužine A_xA' i $A_xA"$ bile okomite na osi x i prije tog prelaganja. Projekcije A' i A" točke A bit će dakle, nakon prelaganja jedne ravnine projekcija na drugu, na pravcu, koji je okomit na osi x, a koji se zove ordinala točke A.

3. Odredjivanje položaja točke u prostoru pomoću njezinih projekcija. Kao što je važno znati, kako se odrede projekcije točke, kad je poznat njezin položaj u prostoru, isto je tako važno da se zna, kako se odredi položaj točke u prostoru, kad su zadane njezine projekcije (sl.5.). Postupak ovisi o položaju ravnine slike.



Sl. 4.



Sl. 5.

A. Kad je ravnina slike horizontalna, t.j. kad se π_1 poklapa s ravninom crtnje, tada uzdigni nad tlocrt A' slike 5. okomicu na ravninu slike, pa na tu okomicu prenesi dužinu A_xA'' počevši od točke A', jer je po slici 2. $A'A = A_xA''$ (čl.1.), pa ćeš dobiti položaj točke A u prostoru.

B. Ako je ravnina slike vertikalna, t.j. ako se π_2 poklapa s ravninom crtnje, onda uzdigni nad nacrt A" slike 5. okomicu na ravninu slike, pa na tu okomicu prenesi dužinu A_xA' počevši od točke A", jer je po slici 2. $A"A = A_xA'$, pa ćeš dobiti položaj točke A u prostoru.

Položaj u prostoru neke točke potpuno je određen njezinim projekcijama.

4. Točke u osobitom položaju. Ako točku A spuštaš po prvoj zraci projiciranja AA' prema horizontalnoj ravnini π_1 (sl.2.), onda se njezin nacrt A" spušta prema osi x po pravcu $A"A_x$. Kad točka padne na π_1 njezin nacrt padne na os x, a njezin se tlocrt nalazi u istoj točki.

Slikom 6. prikazana je točka A, koja je u π_1, i označene su njezine projekcije.

Ako je točka u horizontalnoj ravnini, onda je njezin tlocrt u istoj točki, a njezin nacrt u osi x.

Kad bi točku A primicao po drugoj zraci projiciranja AA" prema vertikalnoj ravnini (slika 2.), tada bi se njezin tlocrt primicao prema osi x po pravcu $A'A_x$. Kad bi točka pala na π_2, njezin bi tlocrt pao u os x, a njezin bi nacrt bio u istoj točki.

Slikom 6. prikazana je točka B, koja je u π_2, i označene su njezine projekcije.

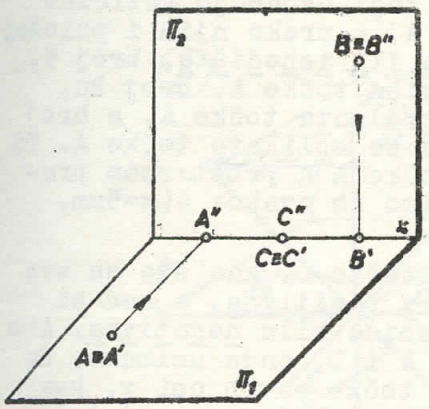
Ako je točka u vertikalnoj ravnini, onda je njezin nacrt u istoj točki, a njezin tlocrt u osi x.

Smjestiš li neku točku na samu os x, onda se ona poklopi sa svojim tlocrtom i nacrtom.

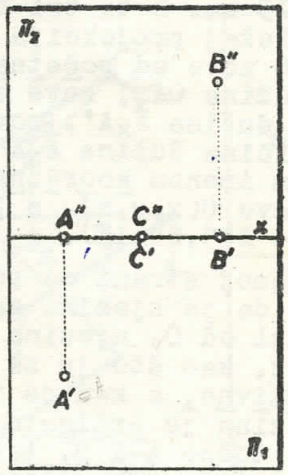
Slikom 6. prikazana je točka C, koja je u osi x i označene su njezine projekcije.

Ako je točka u osi x, onda su njezin tlocrt i nacrt u toj istoj točki.

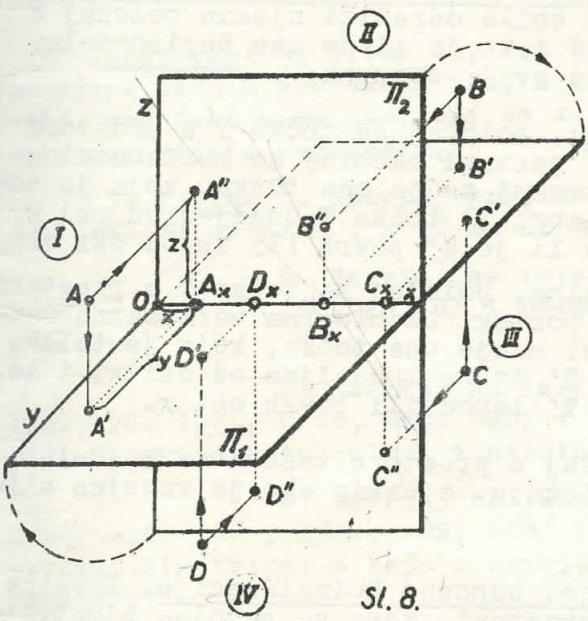
Na slici 7. nacrtane su projekcije točaka A, B i C, kojih je položaj u prostoru prikazan slikom 6. Točka A je u π_1, točka B nalazi se u π_2, a točka C je u osi x.



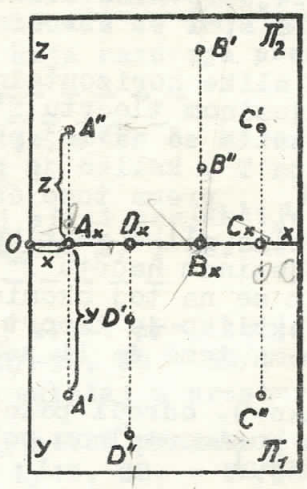
Sl. 6.



Sl. 7.



Sl. 8.



Sl. 9.

[1] St. 5. Kvadranti. Produžimo li horizontalnu ravninu π_1 iza vertikalne ravnine π_2, a vertikalnu ravninu π_2 ispod horizontalne ravnine π_1, one će razdijeliti prostor na četiri kvadranta, koje označujemo rimskim brojevima I., II., III. i IV. (sl. 8.).

Točka A, koja je u I. kvadrantu, nalazi se povrh π_1, a ispred π_2; točka B, koja je u II. kvadrantu, nalazi se povrh π_1, a iza π_2; točka C, koja je u III. kvadrantu, nalazi se ispod π_1, a iza π_2; a točka D, koja je u IV. kvadrantu, nalazi se ispod π_1, a ispred π_2.

Na slici 8. prikazano je kako su odredjeni tlocrti i nacrti točaka A, B, C i D. Kad vertikalnu ravninu π_2 preložimo skupa s nacrtima tih točaka na horizontalnu ravninu π_1, okretanjem oko osi x u smjeru, koji je na slici 8. označen strelicom, dobijemo sliku 9., na kojoj su nacrtane projekcije točaka A, B, C i D, kojih je položaj prostoru prikazan slikom 8. Iz te slike izvodimo ova pravila:

a/ Kad je točka u I. kvadrantu, njezin je tlocrt ispod, a nacrt povrh osi x.

b/ Kad je točka u II. kvadrantu, njezin tlocrt i nacrt su povrh osi x.

c/ Kad je točka u III. kvadrantu, njezin je tlocrt povrh, a nacrt ispod osi x.

d/ Kad je točka u IV. kvadrantu, njezin tlocrt i nacrt su ispod osi x.

---

1) Oznaka St. pred rednim brojem članka znači to, da je nastavno gradivo, koje je obradjeno u tom članku, namijenjeno samo studentima Strojarsko-brodogradjevnog fakulteta.

6. Koordinate točke. Na slici 9. dužina OA_x duga je 5 mm, dužina A_xA' 2o mm, a dužina A_xA'' 15 mm. S ta tri broja, koji označuju veličine tih dužina, odredjen je položaj projekcija točke A, a preko njih i položaj točke A u prostoru. Točka O zove se početna točka ili ishodište, broj 5, kojim je zadana veličina dužine OA_x, zove se apscisa točke A, broj 2o, kojim je označena veličina dužine A_xA', zove se ordinata točke A, a broj 15, kojim je odredjena veličina dužine A_xA'', zove se aplikata točke A. Ti se brojevi zovu zajedničkim imenom koordinate točke A u prostornom pravokutnom koordinatnom sustavu O(x,y,z), a bilježimo ih ovako: A(x=5mm, y=2o mm, z=15 mm) ili kraće A(5,2o,15).

Kad je točka na desnoj strani od početne točke O, kao što su sve točke na slici 9., kažemo, da je njezina apscisa x pozitivna, a kad bi točka bila na lijevoj strani od O, njezina bi apscisa bila negativna. Ako je tlocrt točke ispod osi x, kao što je za točke A i D, onda uzimamo, da je njezina ordinata y pozitivna, a kad je tlocrt točke povrh osi x, kao što je za točke B i C, njezina je ordinata negativna. Kad je nacrt točke povrh osi x, kao što je za točke A i B, tad kažemo, da je njezina aplikata z pozitivna, a kad je nacrt točke ispod osi x, kao što je za točke D i C, njezina je aplikata negativna.

Točke iz slike 9. odredjene su prema tome ovim koordinatama: A(5, 2o, 15), B(23, -25, 1o), C(3o, -15, -2o), D(13, 1o, -25).

St. 7. Odredjivanje položaja točke u kvadrantima pomoću njezinih projekcija. Kako ćemo iz projekcija neke točke odrediti njezin položaj u prostoru, ovisi o položaju ravnine slike, i to da li je ona horizontalna ili vertikalna. Iz slika 8. i 9. izvodimo ovaj postupak:

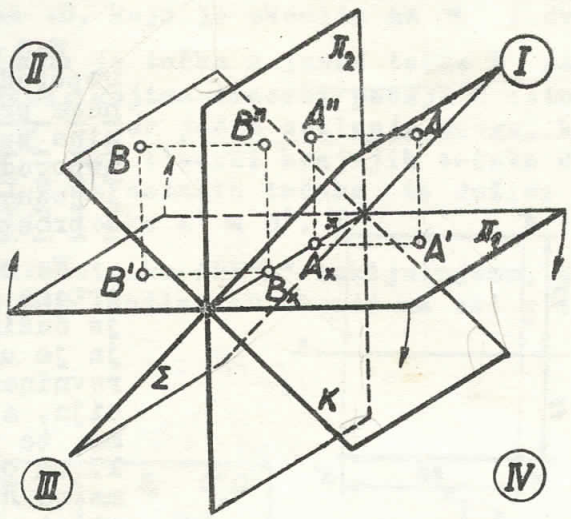
Kad je ravnina slike horizontalna, položaj se točke T u prostoru odredi tako, da se u njezinom tlocrtu T' postavi okomica na horizontalnu ravninu slike Π_1, a zatim se na toj okomici nadje ona točka, koja je toliko udaljena od tlocrta T', koliko je nacrt T'' točke T udaljen od osi x, i to povrh ili ispod Π_1, prema tome da li je T'' povrh ili ispod osi x.

Ako je pak ravnina slike vertikalna, položaj se točke T u prostoru odredi tako, da se u njezinom nacrtu T'' postavi okomica na vertikalnu ravninu slike Π_2, a zatim se na toj okomici nadje ona točke, koja je toliko udaljena od nacrta T'', koliko je tlocrt T' točke T udaljen od osi x, i to ispred ili iza Π_2, prema tome da li je T' ispod ili povrh osi x.

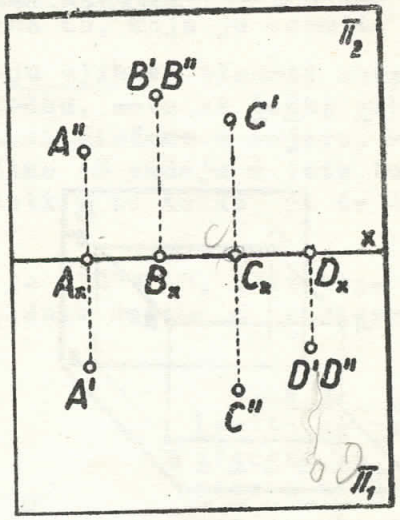
Na temelju slike 9. odredi položaj u prostoru točaka A, B, C i D, ako je ravnina slike u horizontalnom položaju, a zatim ako je ravnina slike u vertikalnom položaju!

St. 8. Točka u ravnnini simetrije, odnosno koincidencije. Ravnina Σ (sl.1o), koja raspolavlja I. i III. kvadrant, zove se ravnina simetrije, a ravnina K, koja raspolavlja II. i IV. kvadrant, zove se ravnina koincidencije. Budući da je svaka točka tih ravnina jednako udaljena od Π_1 i Π_2, to će za točku A, koja je u ravnini simetrije, biti $AA' = AA''$, a prema tome i $A_xA' = A_xA''$, a isto tako će za točku B, koja je u ravnini koincidencije, biti $BB' = BB''$, a prema tome i $B_xB' = B_xB''$. Kad Π_1 preložimo oko osi x na Π_2 u smjeru strelice, bit će prema tome projekcije točke A simetrične s obzirom na os x, a projekcije točke B pasti će skupa, i to povrh osi x (sl.11.). Točka C, koja je u ravnini simetrije, ali u trećem kvadrantu, ima takodjer svoje projekcije simetrične s obzirom na os x, samo je njezin tlocrt C' povrh, a nacrt C'' ispod osi x, dok projekcije neke točke D, koja je u ravnini koincidencije, ali u četvrtom kvadrantu, padaju skupa, ali su ispod osi x.

Projekcije svake točke ravnine simetrije simetrične su s obzirom na os x, dok se projekcije svake točke ravnine koincidencije poklapaju.



Sl. 10.



Sl. 11.

Napomena: Na slici 5., 7., 9. i 11. bila je svaka ravnina projekcija omedjena jednim pravokutnikom, a u buduće ne ćemo ravnine projekcija omedjivati, već ćemo samo naortati os x, koja razdvaja prednji dio ravnine π_1 od gornjega dijela ravnine π_2 .

9. Vježbe.1. Nacrtaj projekcije točke A, koja ima apscisu 30 mm, te je udaljena 20 mm od π_1 , a 40 mm od π_2 !

2. Nacrtaj na istoj slici projekcije točaka: A/10, 30, 20/ , B/30, 0, 20/ , C/50, 20, 0/ i D/-20, 0, 0/ ! Odredi položaj tih točaka u prostoru!

3. Nacrtaj na istoj slici projekcije točaka: E/10,20, 30/ , F/30,-20, 40/ , G/50, -30, -20/ i H/-20, 20, -30/! Odredi za svaku točku u kojem se kvadrantu nalazi i njezin položaj u prostoru!

4. Nacrtaj na istoj slici projekcije točaka I/10, 30, 30/ , J/20, -20, 20/ , K/30, -25, -25/ i L/40, 30, - 30/! Odredi,koje su točke u ravnini simetrije, a koje u ravnini koincidencije, kao i njihov položaj u prostoru!

§ 2. PROJICIRANJE DUŽINE

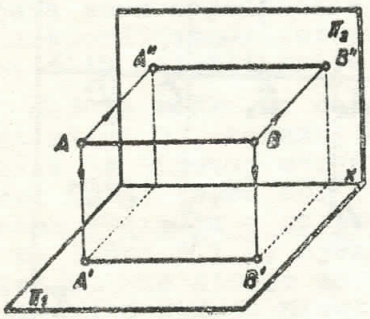
10. Dužina je usporedna s ravninama projekcija. Slikom 12. prikazana je dužina AB, koja je usporedna s ravninama projekcija, a duga je 25 mm.

Ako tlocrt A' jedne krajnje točke te dužine spojiš s tlocrtom B' njezine druge krajnje točke, dobit ćeš dužinu $A'B'$, koja je tlocrt dužine AB. Tlocrti svih točaka dužine AB ispunili bi dužinu AB.

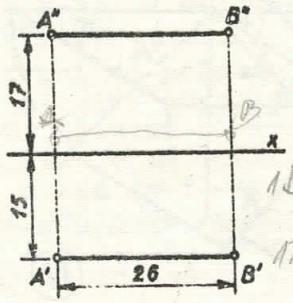
Spojiš li nacrt A'' točke A s nacrtom B'' točke B, dobit ćeš nacrt A''B'' dužine AB. Nacrti svih točaka dužine AB ispunili bi dužinu A''B''.

Iz pravokutnika $ABB'A'$ zaključujemo, da je tlocrt $A'B'$ dužine AB usporedan s tom dužinom i jednak njoj, što se kratko označuje ovako: $A'B' \# AB$, a iz pravokutnika $ABB''A''$ izvodimo, da je $A''B'' \# AB$.

Iz tog razmatranja izlazi:



Sl. 12.



Sl. 13.

Kad je dužina usporedna s ravninama projekcija njezine su projekcije usporedne s osi x i jednake dužini u prostoru.

Na slici 13. nacrtane su projekcije dužine AB, koja je usporedna s ravninama projekcija, a duga je 26 mm, te je udaljena 17 mm od Π_1, a 15 mm od Π_2. Na toj slici nismo ravnine projekcija ograničili u obliku pravokutnika, kako smo to dosad činili, jer njihove granice nisu važne, glavno je da se zna položaj osi x, u kojoj se one presijecaju. Po osi x odredjen je položaj ravnina Π_1 i Π_2. Horizontalna ravnina slike, na kojoj je nacrtana os x jest Π_1, a ravnina, koja bi se osju x položila okomito na ravninu slike, bila bi Π_2.

Položaj u prostoru dužine AB odrediti ćeš ovako: Odredi položaj točke A u prostoru s obzirom na Π_1 (t.j. na osnovi tlocrta točke A) na način, koji je protumačen u čl. 3. točki 1., a zatim odredi položaj točke B u prostoru, pa kad te točke spojiš tankim štapićem, koji je 25 mm dug, dobit ćeš položaj dužine AB u prostoru.

11. Kotiranje. Premda je duljina dužine AB i njezin položaj u prostoru s obzirom na Π_1 i Π_2 potpuno odredjen projekcijama te dužine, ipak su na slici 13. uneseni još i brojevi, koji to pobliže odredjuju. Ti se brojevi zovu kotni brojevi. Dimenzije se mjere, zadaju i kotiraju u strojarstvu u milimetrima, a u graditeljstvu manje dimenzije u centimetrima, a veće u metrima. Tanka zraka, na kojoj se napiše kotni broj, zove se kotna crta, a tanki pravci, kojima se kotna crta ograniči, zovu se pomoćne kotne crte. Kotna crta ne treba da bude suviše blizu dužini, na koju se ona odnosi; njihov razmak ima da iznosi od 3 do 5 mm, Kotni se brojevi pišu prema "Jugoslavenskim standardima" (kratica "JUS") na kotnoj crti. Pomoćne kotne crte treba da prelaze preko kotne crte 1 do 2 mm, i to obje jednako.

Ako je dužina, na koju se odnosi kotna crta, nacrtana crtom debljine d, onda treba da kotna crta i pomoćne kotne crte imaju debljinu 1/4 d, a duljina strelica treba da bude oko 4d. Strelice stavljamo izmedju pomoćnih kotnih crta, a kad nema dovoljno mjesta za strelice, stavimo ih s vanjske strane pomoćnih kotnih crta. (Vidi na sl. 15. strelice na kotnoj crti kote 5).

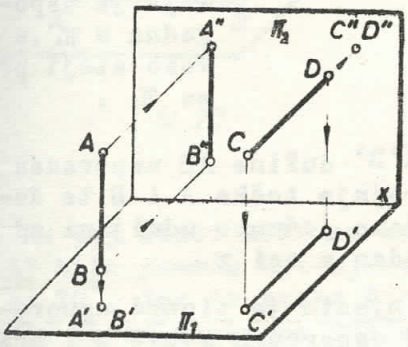
Pomoćne kotne crte obično crtamo okomito na dužinu i na kotnu crtu, s kojima su one u vezi, a samo iznimno možemo ih povući pod kutom od 60° prema dužini i kotnoj crti, ako time kotna crta i kotni broj dolaze bolje do izražaja.

Iz tlocrta i nacrta nekog predmeta mogu se, pored njegovog oblika, odrediti sve njegove dimenzije, ali se to odredjivanje uvelike pojednostavni, kad se projekcijama predmeta dodaju još i kote. Projekcije nekog tehničkog predmeta obično ne crtamo u pravim veličinama, već u nekom mjerilu za umanjenje, ali dimenzije predmeta, koje izražavamo kotnim brojevima, napišemo onolike kolike su na njemu, bez obzira na mjerilo u kojem su nacrtane njegove projekcije.

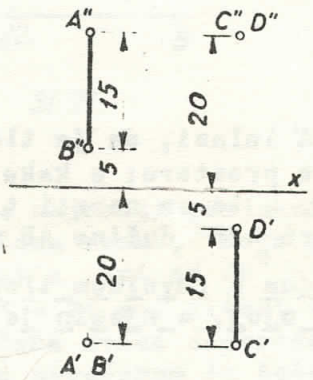
12. Dužina je okomita na jednoj ravnini projekcija. Slikom 14. prikazana je dužina AB, koja je okomita na π_1 i dužina CD, koja je okomita na π_2.

Budući da je točka A iznad točke B, padaju njihovi tlocrti skupa, t.j. $A' \equiv B'$. Točke, kojima tlocrti padaju u istu točku, zovu se točke zaklonice s obzirom na π_1, jer jedna zaklanja drugu, kad ih gledamo u smjeru, koji je okomit na π_1. Ako tlocrti krajnjih točaka dužine AB padaju u istu točku, to će i tlocrti svih ostalih točaka te dužine pasti u tu točku, pa će tlocrt dužine AB biti točka $A' \equiv B'$.

Iz pravokutnika ABB"A" zaključujemo, da je A"B" # AB, a iz toga izlazi da je nacrt A"B" dužine AB okomit na osi x i jednak dužini u prostoru.



Sl. 14.



Sl. 15.

Kad je dužina okomita na ravnini tlocrta, njezin je tlocrt točka, a nacrt je okomit na osi x i jednak dužini u prostoru.

Točka C je ispred točke D, zbog toga padaju njihovi nacrti skupa, t.j. $C'' \equiv D''$. Točke C i D su točke zaklonice s obzirom na π_2, jer jedna zaklanja drugu, kad ih gledamo u smjeru, koji je okomit na π_2. U točku $C'' \equiv D''$ pali bi i nacrti ostalih točaka dužine CD, pa će nacrt te dužine biti točka $C'' \equiv D''$.

Iz pravokutnika CDD'C' izlazi, da je tlocrt C'D' dužine CD okomit na osi x i jednak dužini u prostoru.

Kad je dužina okomita na ravnini nacrta, njezin je nacrt točka, a tlocrt je okomit na osi x i jednak dužini u prostoru.

Na slici 15. nacrtane su:

a/ projekcije dužine AB, koja je okomita na π_1, a duga je 15 mm, ako je njezina donja krajnja točka B udaljena 5 mm od π_1, a 20 mm od π_2.

b/ projekcije dužine CD, koja je okomita na π_2, a duga je 15 mm, ako je njezina stražnja krajnja točka D udaljena 20 mm od π_1, a 5 mm od π_2.

13. Dužina je u jednoj ravnini projekcija. Slikom 16. prikazana je dužina AB, koja je u π_1, i dužina CD, koja je u π_2.

Tlocrt A'B' dužine AB poklapa se s dužinom, a njezin je nacrt A"B" u osi x.

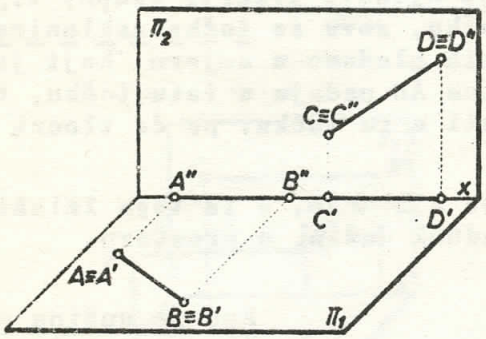
Nacrt C"D" dužine CD poklapa se s dužinom, a njezin je tlocrt C'D' u osi x.

Kad je dužina u ravnini tlocrta, njezin je tlocrt u samoj dužini, a njezin je nacrt u osi x.

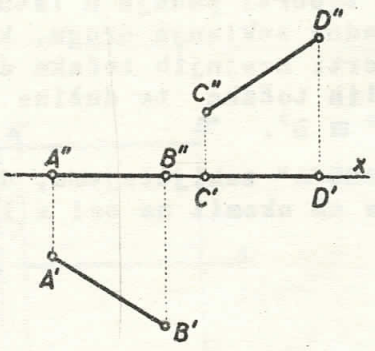
Kad je dužina u ravnini nacrta, njezin je nacrt u samoj dužini, a njezin je tlocrt u osi x.

Na slici 17. nacrtane su projekcije:

a/ dužine AB, koja je u π_1.
b/ dužine CD, koja je u π_2.



Sl. 16.



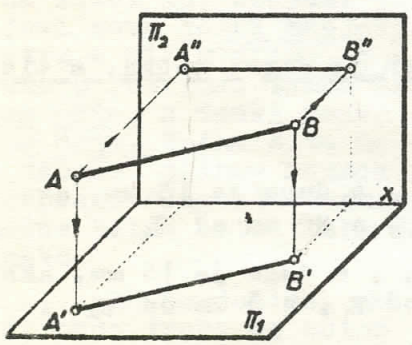
Sl. 17.

14. Dužina je usporedna s ravninom tlocrta. Slikom 18. prikazana je dužina AB, koja je usporedna s π_1, a koso stoji prema π_2.

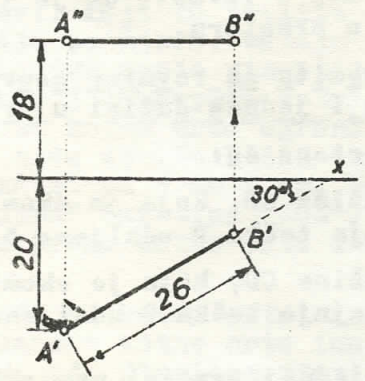
Iz pravokutnika ABB'A' izlazi, da je tlocrt A'B' dužine AB usporedan s dužinom i jednak dužini u prostoru; a kako su krajnje točke A i B te dužine jednako udaljene od π_1, to su nacrti tih točaka jednako udaljeni od osi x, pa je zbog toga nacrt A"B" dužine AB usporedan s osi x.

Kad je dužina usporedna s ravninom tlocrta, njezin je tlocrt usporedan s tom dužinom i jednak njoj, a njezin je nacrt usporedan s osi x i kraći od te dužine.

Na slici 19. nacrtane su projekcije dužine AB, koja je duga 26 mm, a usporedna je s π_1, ako je njezina lijeva krajnja točka A udaljena 18 mm od π_1, a 20 mm od π_2, te ta dužina čini s π_2 kut od 30^0.



Sl. 18.



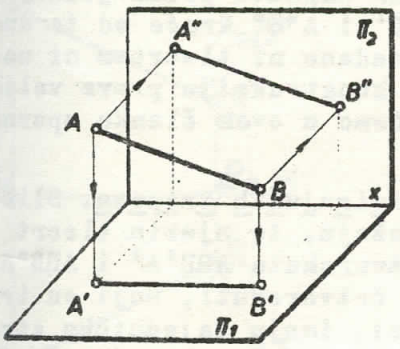
Sl. 19.

Na toj slici bile su nacrtane najprije projekcije A' i A" točke A, pa je točkom A' bila povučena zraka, koja s osi x čini kut od 30^0, a zatim je na tu zraku bila nanesena dužina A'B' = 26 mm. Nacrt A"B" te dužine bio je nacrtan tako, da je iz točke A" bila povučena zraka usporedo s osi x, pa je ona bila presječena u točki B" ordinalom povučenom iz točke B'.

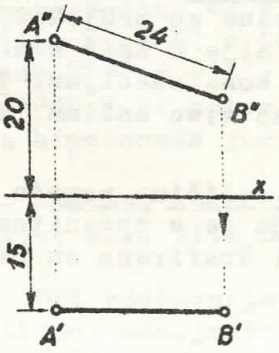
15. Dužina je usporedna s ravninom nacrta. Slikom 20. prikazana je dužina AB, koja je usporedna s π_2, a koso stoji prema π_1.

Budući da su krajnje točke A i B te dužine jednako udaljene od π_2, to su njihovi tlocrti A' i B' jednako udaljeni od osi x, pa je zbog toga tlo-

crt A'B' dužine AB usporedan s osi x. Iz pravokutnika ABB"A" zaključujemo, da je nacrt A"B" te dužine usporedan s njom i jednak dužini u prostoru.



Sl. 20.



Sl. 21.

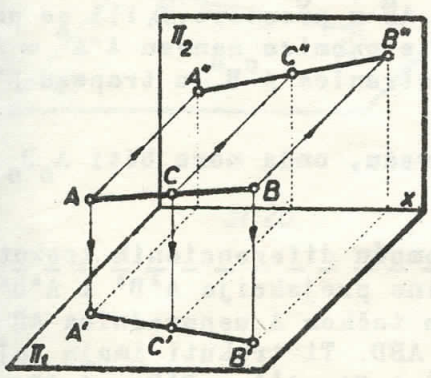
Kad je dužina usporedna s ravninom nacrta, njezin je tlocrt usporedan s osi x i kraći je od nje, a njezin je nacrt usporedan s tom dužinom i njoj jednak.

Na slici 21. nacrtane su projekcije dužine AB, koja je duga 24 mm, a usporedna je s Π_2, ako je njezina lijeva krajnja točka A udaljena 20 mm od Π_1, a 15 mm od Π_2, te ta dužina čini s Π_1 kut od 20^0.

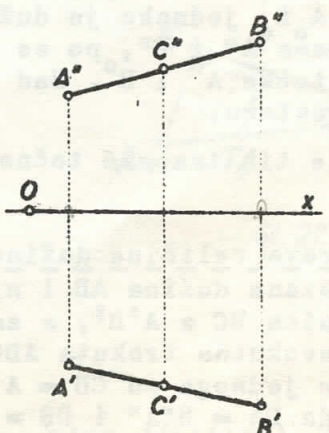
Na toj slici bile su nacrtane najprije projekcije točke A, pa je točkom A" bila pomoću kutomjera povučena zraka, koja s ordinalom A'A" čini kut od 70^0, jer ta zraka čini s osi x kut od $90^0 - 70^0 = 20^0$. Na tu zraku bila je zatim nanesena dužina A"B" = 24 mm. Tlocrt te dužine bio je nacrtan tako, da je iz točke A' bila povučena zraka usporedo s osi x, pa je ona bila presječena u točki B' ordinalom povučenom iz točke B".

16. Dužina je u općenitom položaju. Sve dužine koje smo dosad promatrali, bile su u osobitom položaju prema Π_1 ili Π_2. Dužina AB iz slike 22. nagnuta je prema Π_1 i Π_2, zato kažemo, da je ona u općenitom položaju prema ravninama projekcija.

Projekcije dužine AB dobijemo tako, da odredimo tlocrt A' i B', zatim nacrt A" i B" njezinih krajnjih točaka A i B, pa ih spojimo.
A'B' je tlocrt, a A"B" nacrt dužine AB. Kad preložimo Π_2 oko osi x na Π_1, ostane tlocrt na svom mjestu, a nacrt dodje povrh osi x.



Sl. 22.



Sl. 23.

Obje projekcije te dužine kraće su od nje i nisu usporedne s njom.

Ako je točka C polovište dužine AB, onda je prva zraka projiciranja CC' usporedna i jednako udaljena od prvih zraka projiciranja AA' i BB' točaka A i B, pa je zbog toga tlocrt C' točke C u polovištu tlocrta A'B' dužine AB.

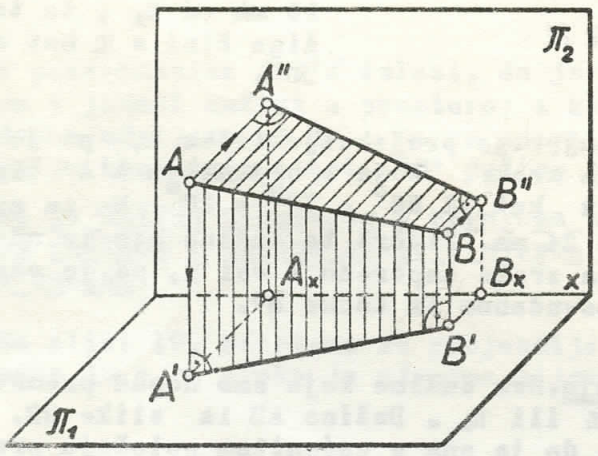
Isto tako je druga zraka projiciranja CC" točke

C usporedna i jednako udaljena od drugih zraka projiciranja AA" i BB" točaka A i B, pa je zbog toga nacrt C" točke C u polovištu nacrta A"B" dužine AB.

Polovište dužine projicira se u polovištu projekcije te dužine. Na slici 23. nacrtane su projekcije dužine, kojoj su krajnje točke A/ 5, 20, 15/ i B/ 30, 2 5, 2 2/ , a zatim su nacrtane projekcije polovišta C te dužine.

17. Prava veličina dužine. Kad je dužina AB nagnuta prema jednoj i drugoj ravnini projekcija, njezine su projekcije A'B' i A"B" kraće od te dužine. Prava veličina dužine AB nije u tome slučaju zadana ni tlocrtom ni nacrtom, već je moramo odrediti konstrukcijom. Ta se konstrukcija prave veličine neke dužine može izvesti na više načina, a mi ćemo u ovom članku upoznati dva načina:

A.- Određivanje prave veličine pomoću projicirajućih trapeza. Slikom 24. prikazana je dužina AB, koja je u općenitom položaju, te njezin tlocrt A'B' i nacrt A"B". Na toj slici šrafirana su dva četverokuta ABB'A' i ABB"A". Ti četverokuti, koji su trapezi, imaju zajedničku stranicu AB, a svaki od njih ima po dva prava kuta, i to prvi u vrhovima A' i B', a drugi u A" i B". Četverokut ABB'A' zove se prvi projicirajući trapez, a četverokut ABB"A" je drugi projicirajući trapez.



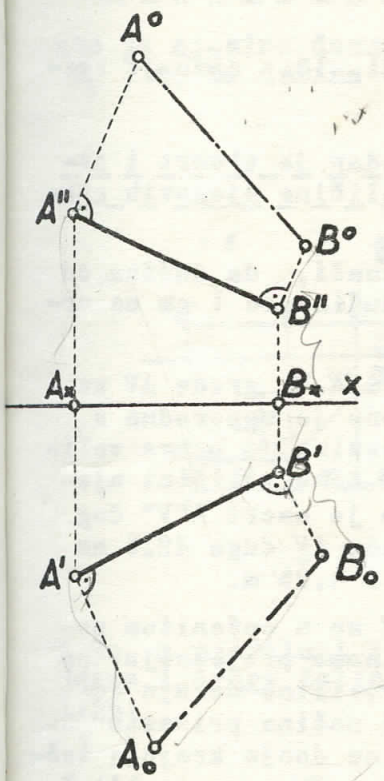
Sl. 24.

Pravu veličinu dužine AB možemo dobiti tako, da prvi projicirajući trapez ABB' A' preložimo oko njegove stranice A'B' na π_1, ili da drugi projicirajući trapez ABB"A" preložimo oko njegove stranice A"B" na π_2. Kad su zadane projekcije dužine AB, imamo sve elemente potrebne za konstrukciju tih preloženih trapeza, jer je za prvi trapez $A'A = A_xA"$, a $B'B = B_xB"$, dok je za drugi trapez $A"A = A_xA'$ a $B"B = B_xB'$.

Preloženi položaji tih trapeza (sl.25.) nacrtaju se prema tome ovako: Povuku se okomice na A'B' u točkama A' i B', a zatim se na te okomice nanesu $A'A_o = A_xA"$ i $B'B_o = B_xB"$, a zatim se spoje točke A_o i B_o. U tako nacrtanom trapezu $A'B'B_oA_o$ stranica A_oB_o jednaka je dužini AB u prostoru. Ili se postave okomice na A"B" u točkama A^oA" i B", pa se na te okomice nanesu $A"A^o = A_xA'$ i $B"B^o = B_xB'$, te se spoje točke A^o i B^o. Sad je stranica A^oB^o u trapezu $A"B"B^oA^o$ jednaka dužini AB u prostoru.

Ako se konstrukcije tih trapeza točno izvedu, onda mora biti $A_oB_o = A^oB^o$.

B.- Konstrukcija prave veličine dužine pomoću diferencionih trokuta. Na slici 26., kojom su prikazane dužina AB i njezine projekcije A'B' i A"B", povučena je točkom B uporednica BC s A'B', a zatim točkom A uporednica AD s A"B" , pa su nastala dva pravokutna trokuta ABC i ABD. Ti trokuti imaju zajedničku hipotenuzu AB. Katete jednoga su $CB = A'B'$ i $CA = A'A - B'B = A_xA" - B_xB"$, dok su katete drugoga $DA = B"A"$ i $DB = B"B - A"A = B_xB' - A_xA'$. Kad su dane projekcije dužine AB, imamo prema tome sve elemente potrebne za konstrukciju tih diferencionih trokuta.



Sl. 25.

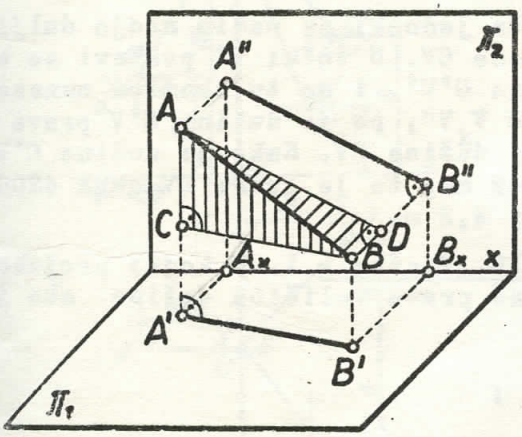
Na slici 27. povučemo najprije usporednice s osi x točkama A' i B", pa dobijemo točke D' i C". Postavimo zatim u točki A' okomicu na A'B' i na tu okomicu nanesemo $A'A_0 = C"A"$. Pravokutan trokut $A'B'A_0$ sukladan je s trokutom CBA u prostoru, pa je njegova hipotenuza $B'A_0$ jednaka dužini AB u prostoru. Ili se postavi okomica na A"B" u točki B", pa se na tu okomicu nanese $B"B^0 = D'B'$. Budući da je trokut $A"B"B^0$ sukladan s trokutom ADB u prostoru, to je njegova hipotenuza jednaka dužini AB u prostoru.

Kad se konstrukcije tih trokuta točno nacrtaju, mora biti $B'A_0 = A"B^0$.

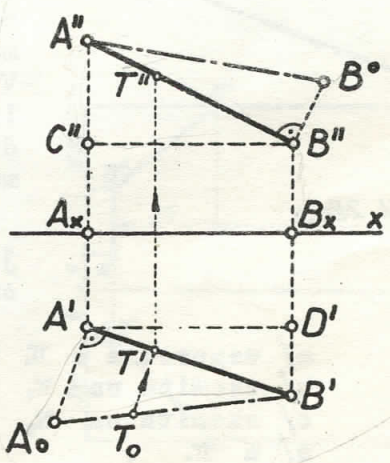
Pri rješavanju tog zadatka nisu bile upotrebljene udaljenosti projekcija krajnjih točaka dužine od osi x, pa smo na sl.27. os x mogli izostaviti. Tehničar, kad crta projekcije nekog predmeta, obično izostavlja os x, kao i ordinale.

Ako je točka T na dužini AB u prostoru i dijeli je u omjeru AT : BT = n, onda mora točka T_0 biti na dužini A_0B' i dijeliti je u istom omjeru : $A_0T_0 : B'T_0 = n$ / sl.27./

Ako sada pomoću točke T_0 nadjemo projekci-



Sl.26.



Sl. 27.

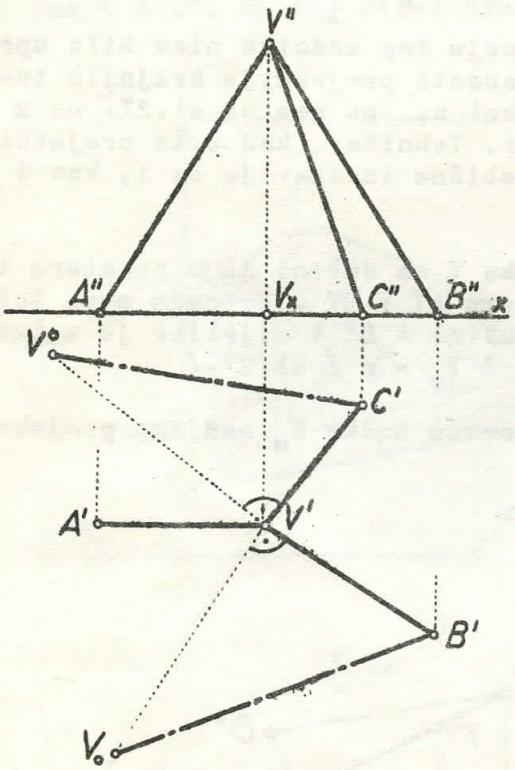
je T' i T" točke T (T_0T' // A_0A' , T'T" // A'A"), onda projekcije točke T dijele projekcije dužine AB u istom omjeru, jer su homologni odresci dviju zraka medju sobom razmjerni, pa se $A_0T_0 : B'T_0 = A'T' : B'T' = A"T" : B"T"$.

Ako je točka T na dužini AB i dijeli je u nekom omjeru, bit će normalna projekcija te točke na normalnoj projekciji te dužine i dijelit će je u istom omjeru.

Pravilo o projekcijama polovišta neke dužine iz čl. 15. samo je specijalni slučaj toga pravila.

18. Odredjivanje prave veličine greda tronoga. Zadan je tlocrt i nacrt tronoga ABCV u mjerilu 1:100, neka se odrede prave veličine njegovih greda AV, BV, CV i ∠ sl.28.∠

Kad je predmet nacrtan u mjerilu 1:100, onda to znači, da dužina od 1 mm na crtežu predočuje dužinu od 100 mm u naravi, ili dužinu od 1 cm na crtežu predočuje dužinu od 100 cm = 1 m u naravi.



Sl. 28.

Budući da je tlocrt A'V' grede AV usporedan s osi x, ona je usporedna s π_2 . /čl.15./. Njezina je prava veličina jednaka prema tome veličini njezinog nacrta. Kako je nacrt A"V" dug 42,5 mm, to je greda AV duga 42,5 mm x 100 = 4250 mm ili 4,25 m.

Grede BV i CV su u općenitom položaju prema ravninama projekcija, pa se njihove prave veličine moraju odrediti na jedan od načina prikazan u čl. 17. Budući da su donje krajnje točke B i C tih greda u π_1 , upotrebit ćemo metodu odredjivanja prave veličine dužine pomoću diferencionog trokuta.

U točki V' postavimo okomicu na B'V' , i na tu okomicu nanesimo $V'V_0 = V_xV''$, pa će dužina $B'V_0$ biti prava veličina dužine BV. Budući da je dužina $B'V_0$ duga 45 mm, to je greda BV duga 4500 mm, ili 4,5 m.

Na jednaki se način nadje duljina grede CV. U točki V' postavi se okomica na C'V', i na tu okomicu nanese $V'V^0 = V_xV''$, pa je dužina $C'V^0$ prava veličina dužine CV. Kako je dužina $C'V^0$ duga 42 mm, to je greda CV duga 4200 mm ili 4,2 m.

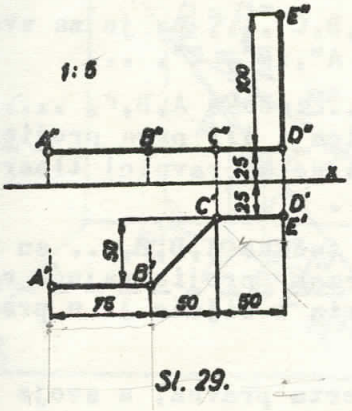
19. Vježbe.- 1. U kojoj projekciji imaš pravu veličinu dužine, ako je ona:

a/ usporedna s π_1 i π_2 ;
b/ okomita na π_1 ;
c/ okomita na π_2 ;
e/ u π_1 ;
d/ u π_2 ;
f/ usporedna s π_1 ;
g/ usporedna s π_2 ?

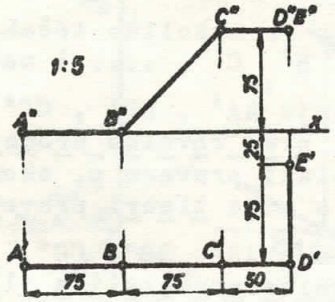
2. Nacrtaj projekcije dužine AB, koja je duga 30 mm, a usporedna je s π_1, ako je njezina desna krajnja točka A udaljena 20 mm od π_1 , a 30 mm od π_2, te ta dužina čini s π_2 kut od 45°!

3. Nacrtaj projekcije dužine CD, koja je duga 35 mm, a usporedna je s π_2

ako je njezina desna krajnja točka C udaljena 4o mm od Π_1 , a 2o mm od Π_2 , te ta dužina čini s Π_1 kut od 6o°:



Sl. 29.



Sl. 30.

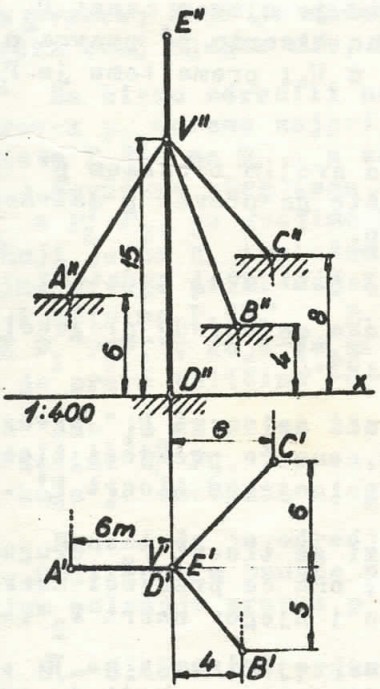
4. Nacrtaj dužinu, odredi njezin položaj u prostoru i pravu veličinu, ako su njezine krajnje točke:

a) A(1o,2o,2o) i B(5o,5o,4o) ;
b) C(1o,2o, 0) i D(5o,5o,2o) ;
c) E(2o, 0,2o) i F(6o,4o,5o) !

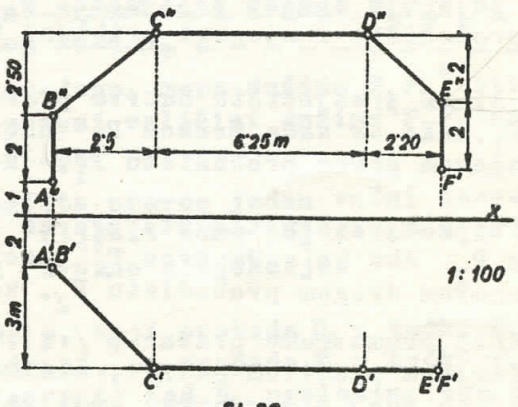
5. Savinute željezne šipke zadane su tlocrtom i nacrtom na slici 29. i 3o. u mjerilu 1 : 5. Nacrtaj obje slike u mjerilu 1:25 i odredi duljinu jedne i druge željezne šipke! Napravi iz žice modele tih šipki u mjerilu 1:25!

6. Na slici 31. nacrtan je u mjerilu 1:4oo tlocrt i nacrt željeznog dimnjaka DE, koji treba pričvrstiti na susjedne zgrade žičanim užetima AV, BV i CV. Nacrtaj tu sliku u mjerilu 1:2oo i odredi koliko je metara žičanog uževlja potrebno!

7. Odredi pravu veličinu savinute cijevi od kovanog željeza, kojoj je tlocrt i nacrt nacrtan na slici 32. u mjerilu 1:1oo!



Sl. 31.



Sl. 32.

§ 3. PROJICIRANJE PRAVCA [1]

20. Probodišta i prikloni kutovi pravaca. Slikom 33. prikazan je pravac p, koji probada π_1 u točki P_1, a π_2 u točki P_2. Točka P_1, zove se prvo probodište, a točka P_2 drugo probodište pravca p. Pravac p nastavlja se ispod prvog probodišta u IV. kvadrant, a iza drugog probodišta u II. kvadrant.

Na pravcu p istaknuto je nekoliko točaka A,B,C ..., pa je za svaku tu točku odredjen tlocrt A' , B' , C' , ... i nacrt A", B", C", ...

Prve zrake projiciranja AA' , BB' , CC', ... točaka A,B,C, ... nalaze se u ravnini, koja se zove prva ravnina prometalica ili prva projicirajuća ravnina pravca p. Ona prolazi pravcem p, okomita je na ravnini tlocrta i siječe je u pravcu p' koji se zove tlocrt pravca p.

Druge zrake projiciranja AA", BB", CC", ... točaka A,B,C,... su u ravnini, koja se zove druga ravnina prometalica ili druga projicirajuća ravnina. Ona prolazi pravcem p, okomita je na ravnini nacrta i siječe je u pravcu p", koji se zove nacrt pravca p.

Sve točke pravca imaju svoje tlocrte na tlocrtu pravca, a svoje nacrte na nacrtu pravca. Iz toga izvedimo poučak:

Kad je točka na pravcu, njezin je tlocrt na tlocrtu, a nacrt na nacrtu toga pravca.

Prvo probodište P_1 pravca p je u π_1 , zato je njegov tlocrt P_1' u istoj točki. Kako je P_1 na pravcu p, mora njegov nacrt P_1'' biti na nacrtu p" pravca p, a budući da je P_1 i u π_1 , treba njegov nacrt da bude i u osi x; prema tom P_1" mora biti u presjecištu nacrta pravca p" i osi x.

Drugo probodište P_2 pravca p je u π_2 . zato je njegov nacrt P_2'' u istoj točki. Tlocrt P_2' drugog probodišta mora biti na tlocrtu p' pravca p, jer je P_2 na p, ali on mora biti i u osi x, jer je P_2 u π_2; prema tome je P_2' u presjecištu tlocrta pravca p' i osi x.

Oštri kut α_1 , što ga pravac p zatvara sa svojim tlocrtom p' zove se prvi prikloni kut pravca p, a oštri kut α_2 , što ga pravac p zatvara sa svojim nacrtom p", zove se drugi prikloni kut pravca p.

Na temelju tih razmatranja možemo sada riješiti ovaj zadatak:

Zadan je tlocrt p' i nacrt p" pravca p; neka se odrede projekcije njegovih probodišta i njegovi prikloni kutovi! / sl.34./

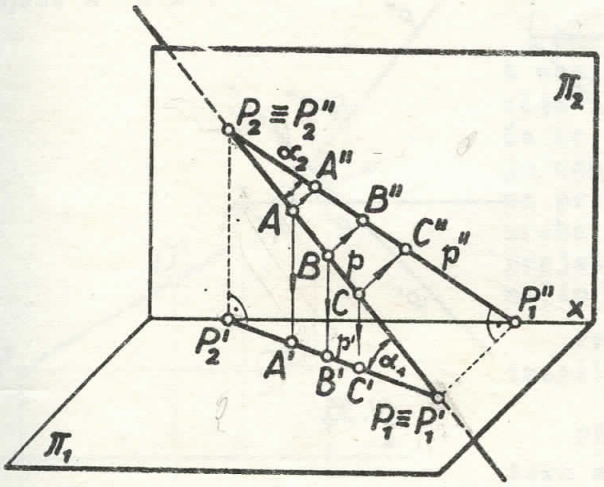
A.- U presjecištu nacrta pravca i osi x nalazi se nacrt P_1" prvog probodišta P_1. Ako se sada točkom P_1" nacrta ordinala, ona će presjeći tlocrt pravca u njegovom prvom probodištu P_1, koji je ujedno i njegov tlocrt P_1' .

U presjecištu tlocrta pravca i osi x nalazi se tlocrt P_2' drugoga probodišta P_2. Ako se sada kroz P_2' nacrta ordinala, ona će presjeći nacrt pravca u njegovom drugom probodištu P_2, koji je ujedno i njegov nacrt P_2".

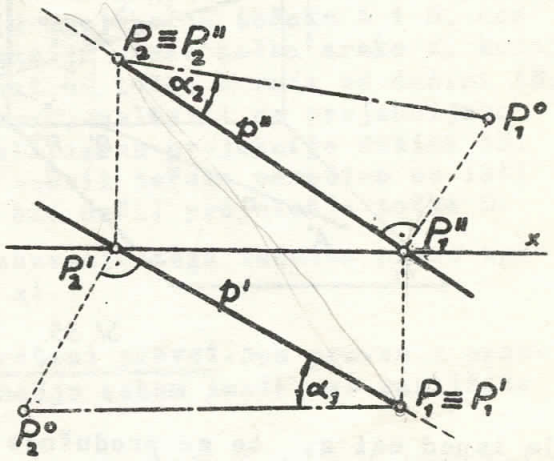
Kad promatramo pravac p / sl.33./ u smjeru projiciranja na π_1 , t.j. u smjeru okomitom na π_1 , vidimo samo onaj dio pravca, koji je povrh π_1 , a ne vidimo onaj dio pravca, koji je ispod π_1 , jer ga π_1 zaklanja. Budući da projekcija vidljivog dijela pravca crta punom crtom, a nevidljivog isprekidanom crtom, moramo na sl. 34 nacrtati punom crtom onaj dio tlocrta pravca, koji je na lijevo od prvoga probodišta $P_1 \equiv P_1'$, a isprekidanom crtom onaj njegov dio, koji je na desno od P_1.

---

1) Za pravac , koji prolazi točkama A i B, upotrebljavat ćemo kraticu / AB /.



Sl. 33.



Sl. 34.

Promatramo li sada pravac p / sl.33./ u smjeru projiciranja na Π_2 , t.j. odsprijeda u smjeru okomitom na π_2 , vidjet ćemo samo onaj dio pravca, koji je ispred Π_2 , a ne ćemo vidjeti onaj dio pravca, koji je iza Π_2 , jer ga Π_2 zaklanja. Moramo prema tome na sl. 34. nacrtati punom crtom onaj dio nacrta pravca, koji je nadesno od drugog probodišta $P_2 \equiv P_2''$, a isprekidanom crtom onaj njegov dio, koji je nalijevo od P_2.

Da bismo odredili na sl. 34. prave veličine priklonih kutova α_1 i α_2 pravca p, moramo najprije preložiti pravokutni trokut $P_1P_2P_2'$ /sl.33./oko katete P_1P_2' na Π_1 , a zatim pravokutni trokut $P_1P_2P_1''$ oko katete P_2P_1'' na Π_2 . Povučemo zbog toga točkom P_2' / sl.34. / okomicu na p' i učinimo $P_2'P_2^0 = P_2'P_2$, pa spojimo P_2^0 s P_1. Sada smo dobili pravokutni trokut $P_1P_2^0P_2'$, koji je na π_1 preloženi pravokutni trokut $P_1P_2P_2'$, a u njemu je prava veličina prvoga priklonog kuta α_1 . Ako zatim u točki P_1'' postavimo okomicu na p'' i učinimo $P_1''P_1^0 = P_1''P_1$, pa spojimo P_1^0 s P_2, dobijemo pravokutni trokut $P_1^0P_2P_1''$, koji je na π_2 preloženi pravokutni trokut $P_1P_2P_1''$, a u njemu je prava veličina drugog priklonog kuta α_2 .

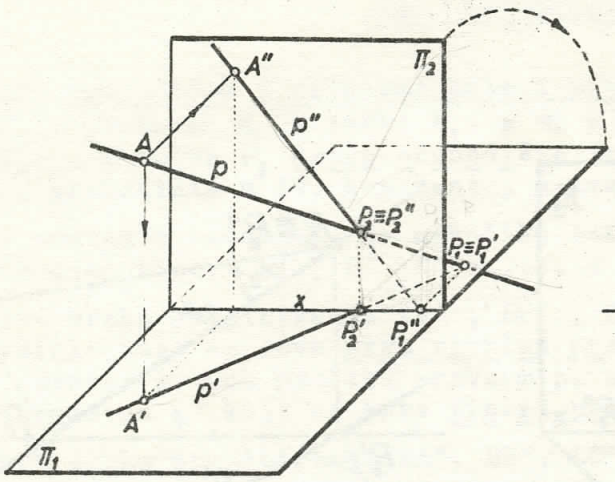
Ako je na slici 34. sve točno izvedeno, mora dužina $P_1P_2^0$ biti jednaka dužini $P_1^0P_2$, jer su one jednake pravoj veličini dužine P_1P_2 na pravcu p, koja je omedjena njegovim probodištima.

Budući da je odredjivanje probodišta pravca jedan važni osnovni zadatak, koji ćemo u buduće primjenjivati, riješit ćemo taj zadatak pri drugačijem položaju pravca p s obzirom na ravnine projekcija.

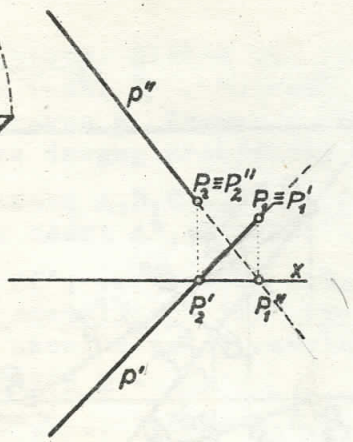
B.- Slikom 35. prikazan je pravac p, koji probada Π_2 u točki P_2 ,koja je povrh osi x, a zatim ulazi u II. kvadrant, pa probada Π_1 u točki P_1, koje je iza osi x, te se produžuje u III. kvadrant. Kad Π_2 preložimo oko osi x na Π_1 u smjeru strelice, oba će probodišta biti povrh osi x.

Na slici 36. nacrtane su projekcije pravca p iz slike 35.,a zatim su odredjena njegova probodišta P_1 i P_2 istim postupkom po kojemu su nadjena probodišta na sl.34.

C.- Slikom 37. prikazan je pravac p, koji probada Π_1 u točki P_1, koja je ispred osi x, a zatim ulazi u IV. kvadrant, pa probada Π_2 u točki P_2, ko-

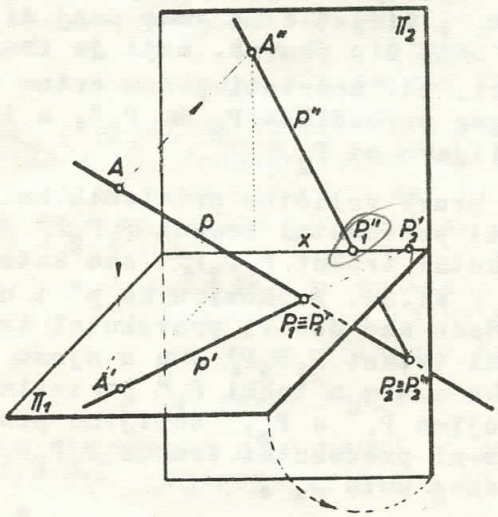


Sl. 35.

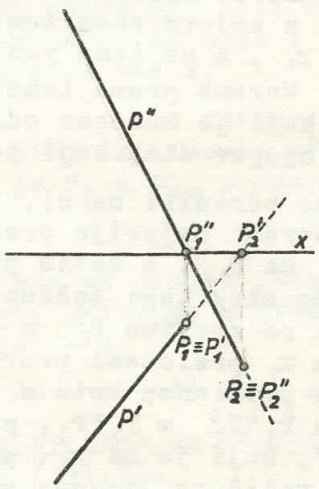


Sl. 36.

ja je ispod osi x, te se produžuje u III. kvadrant. Kad Π_1 preložimo oko osi x na Π_2 u smjeru strelice oba će probodišta biti ispod osi x. Na slici 38. nacrtane su projekcije pravca p iz slike 37., pa su zatim odredjena nje-



Sl. 37.



Sl. 38.

gova probodišta P_1 i P_2 po istom postupku kao i na sl. 34.

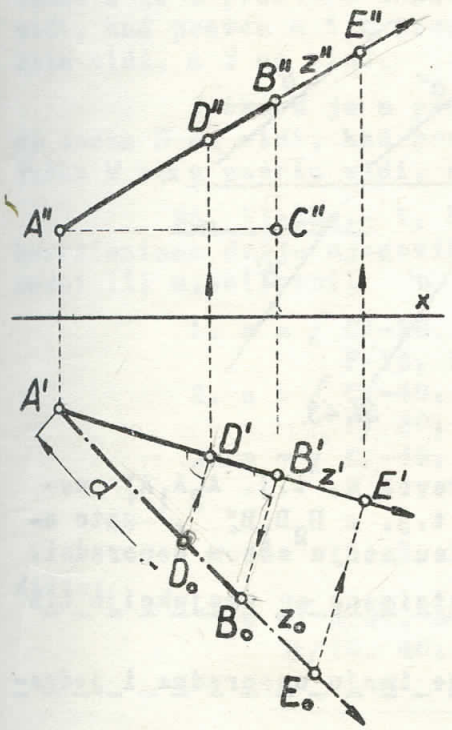
Koji je dio tlocrta odnosno nacrta, pravca p vidljiv, a koji je nevidljiv na slikama 36.i 38. ,odredimo na isti način kako smo to učinili na sl. 34.

Napomena: Sva pravila, koja smo u § 2. utvrdili za projekcije dužine, koja je u nekom osobitom položaju prema ravninama projekcija, vrijede i za pravac, koji je u nekom osobitom položaju prema Π_1 i Π_2 , pa ih ne moramo ponavljati.

21. Odredjivanje položaja točke na zadanoj zraci. Na zraci z, koja je zadana tlocrtom i nacrtom, treba naći točku D, koja je od početne točke A zrake z udaljena za duljinu d / sl.39./

Najprije se na zraci z označe projekcije B' i B'' kojegod njezine točke B. Odredi se zatim prava veličina $A'B_0$ dužine AB pomoću diferencionog trokuta $A'B'B_0$ / čl.17.B. /. Sada se na preloženoj zraci z_0, koja je odredjena

točkama A' i B_o, označi točka D_o, koja je od točke A' udaljena za duljinu d. Na kraju nadju se projekcije D' i D" točke D tako, da se iz D_o povuče okomica na z', koja presiječe z' u D' , a zatim se točkom D' nacrta ordinala, koja presiječe z" u D".



Sl. 39.

One točke, kojih je udaljenost od točke A manja od dužine AB, imat će svoje projekcije izmedju projekcija točaka A i B, dok će se projekcije svake točke zrake z, kojoj je udaljenost od točke A veća od dužine AB, na pr. točke E, nalaziti na projekcijama zrake z, ali izvan projekcija dužine AB. Projekcije takvih točaka odredimo na isti način kako smo našli projekcije točke D.

Pri rješavanju toga zadatka nismo upotrebili os x!

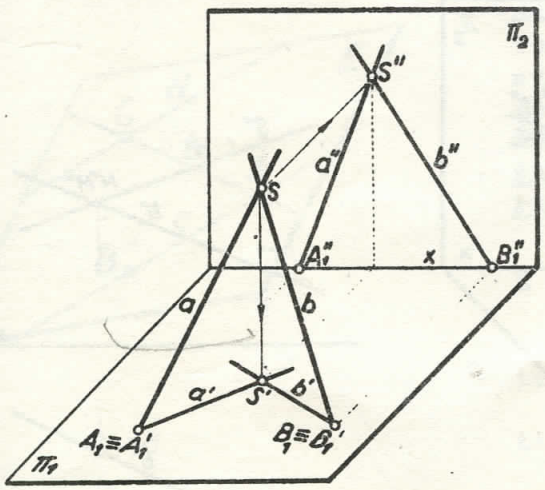
22. Ukršteni pravci. Dva pravca u prostoru mogu medju sobom imati ove različite položaje:

a/ kad se oni ukrštavaju u jednoj točki, oni su ukršteni;

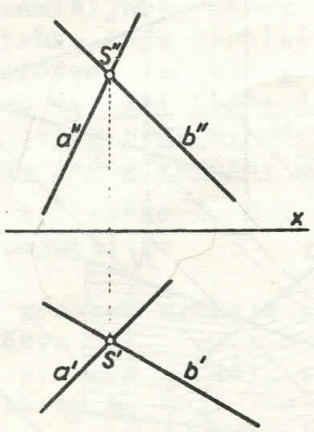
b/ kad oni idu usporedo jedan s drugim, oni su usporedni i

c/ kad oni idu jedan mimo drugog, oni su mimoilazni.

Slikom 40. prikazana su dva pravca a i b, koji se ukrštavaju u točki S, i naznačena su njihova probodišta A_1 i B_1. Kako je točka S zajednička točka pravaca a i b, to se u njezinom tlocrtu S' moraju sjeći tlocrti a' i b', a u njezinom nacrtu S" moraju se sjeći nacrti a" i b" tih pravaca. Nakon prelaganja ravnine nacrta oko osi x na ravninu tlocrta moraju projekcije S' i S" njihove zajedničke točke S biti na istoj ordinali, t.j. mora biti $S'S'' \perp x$.



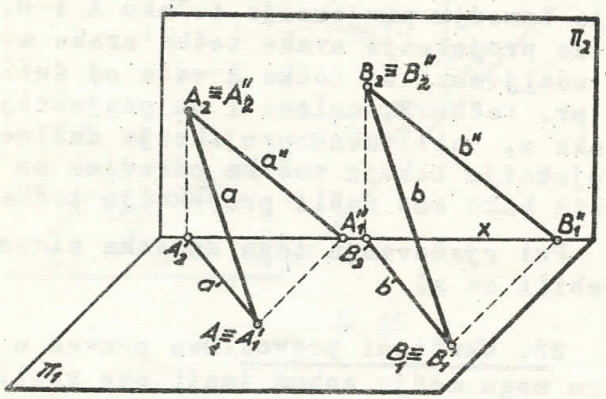
Sl. 40.



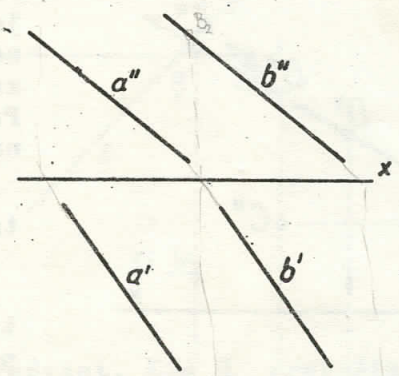
Sl. 41.

Na slici 41. nacrtane su projekcije dvaju ukrštenih pravaca a i b, koji se sijeku u točki S.

23. Usporedni pravci. Slikom 42. prikazana su dva usporedna pravca a i b, i označena su njihova probodišta A_1, A_2 i B_1, B_2. Prva projicirajuća ravnina pravca a , t.j. $A_2A_2'A_1$, usporedna je s prvom projicirajućom ravninom pravca b, t.j. s $B_2B_2'B_1$, zato one sijeku ravninu tlocrta u pravcima a' i b', koji su takodjer medju sobom usporedni.



Sl. 42.



Sl. 43.

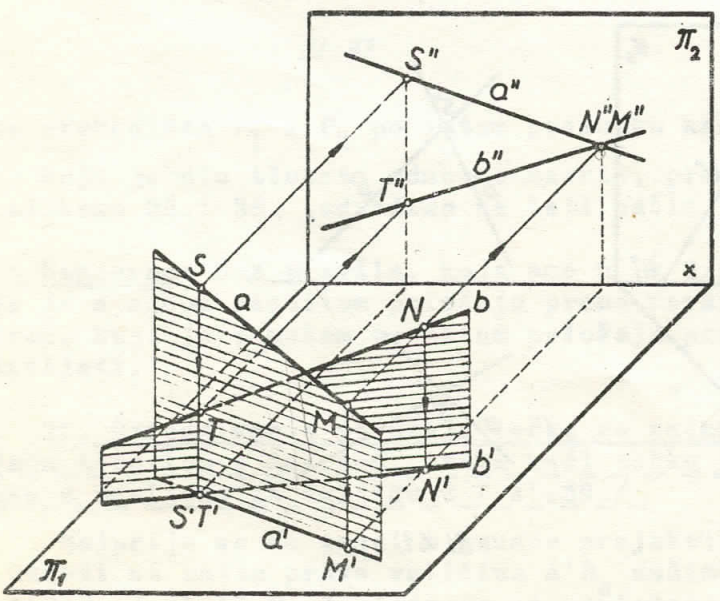
Isto tako je druga projicirajuća ravnina pravca a, t.j. $A_2A_1A_1''$ usporedna s drugom projicirajućom ravninom pravca b, t.j. s $B_2B_1B_1''$, zato one sijeku ravninu nacrta u pravcima a'' i b'', koji su medju sobom usporedni.

Kad su dva pravca medju sobom usporedna, istoimene su projekcije tih pravaca medju sobom usporedne.

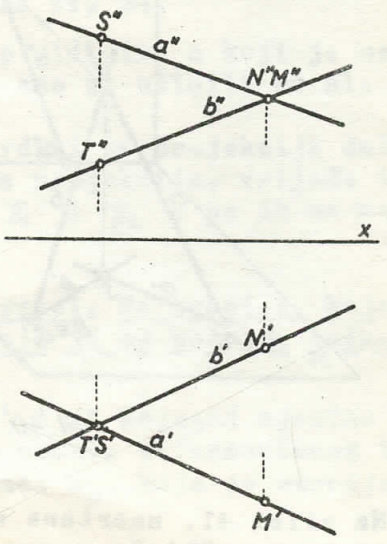
Dvije medju sobom usporedne i jednake dužine imaju usporedne i jednake istoimene projekcije.

Na sl. 43. nacrtane su projekcije dvaju usporednih pravaca a i b.

24. Mimoilazni pravci. Slikom 44. prikazana su dva mimoilazna pravca a i b. Pravac a uzdiže se u prostoru nalijevo, a pravac b nadesno. Njihovi tlocrti a i b sijeku se u točki, koja je označena slovima S' i T', jer je ona tlocrt točke S pravca a i tlocrt točke T pravca b. Točke S i T su točke zaklonice tih pravaca s obzirom na ravninu tlocrta.



Sl 44.



Sl. 45.

Točka, u kojoj se sijeku nacrti a" i b" pravca a i b, označena je slovima M" i N", jer je ta točka nacrt točke M pravca a i nacrt točke N pravca b. Točke M i N su točke zaklonice tih pravaca s obzirom na ravninu nacrta. Nakon prelaganja ravnine nacrta oko osi x na ravninu tlocrta sjeći će se medju sobom tlocrti a' i b', kao i nacrti a" i b", mimoilaznih pravaca a i b, ali ta presjecišta ne će biti na istoj ordinali.

Na sl. 45. nacrtane su projekcije dvaju mimoilaznih pravaca a i b. Točka S je u prostoru iznad točke T, jer je S" iznad T", zato se točka T ne vidi, kad pravce a i b promatramo odozgo okomito prema π_1. Točka S se u tlocrtu vidi, a T ne vidi.

Točka M je u prostoru ispred točke N, jer je M' ispred N', zato se točka N ne vidi, kad promatramo pravce a i b odsprijeda okomito prema π_2. Točka M se u nacrtu vidi, a N ne vidi.

25. Vježbe.- 1. Nacrtaj pravce a i b, ako je svaki pravac zadan koordinatama dviju njegovih točaka, pa odredi jesu li oni ukršteni ili usporedni ili mimoilazni:

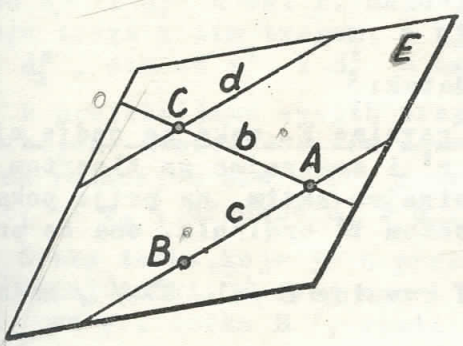
1. a = [C/-20, 30,10/ , D/20, 20, 30/] i b=[E/15, 40,35/ F/15, 10, 5/] ;
2. a = [C/-40, 50, 20/ , D/40, 10, 40/] i b=[E/-30, 20, 70/, F/ 30, 60, 20/] ;
3. a = [C/-40, 10, 10/ , D/-10, 40, 30/] i b=[E/20, 20, 20/ , F/50, 50, 40/] !

2. Nacrtaj pravce a, b i c, pa odredi njihova probodišta:

a =[A/30, 40, 10/ , B/70, 10, 30/]; b = [C/50, 20, 20/ , D/70, 40, 30/] ; c=[E/50, 20, 20/ , F/70, 30, 40/] !

§ 4. PROJICIRANJE RAVNINE

26. Odredjenost ravnine. Poznato je iz stereometrije, da je ravnina jedna neomedjena ploha, koja ima to svojstvo, da svaki pravac, koji s njom ima dvije zajedničke točke, leži sasvim u toj ravnini.



Sl.46.

Budući da je ravnina neomedjena, t.j. proteže se na sve strane, prikazujemo je obično samo jednim njezinim dijelom, na pr. paralelogramom / sl.46./ , a pri tome zamišljamo, da se ona proteže na sve strane toga paralelograma. Ravnine obilježavamo velikim grčkim slovima. Znademo da: Tri točke A, B i C, koje nisu na istom pravcu, odredjuju u prostoru samo jednu ravninu E / sl. 46. /

Te tri točke A, B i C možemo u ravnini E nadomjestiti:

a/ pravcem c, koji ide točkama A i B, te točkom C;
b/ pravcem c, koji ide točkama A i B, te pravcem b, koji ide točkama A i C,
d/ pravcem c, koji ide točkama A i B, te pravcem d, koji ide točkom C usporedo s pravcem c.

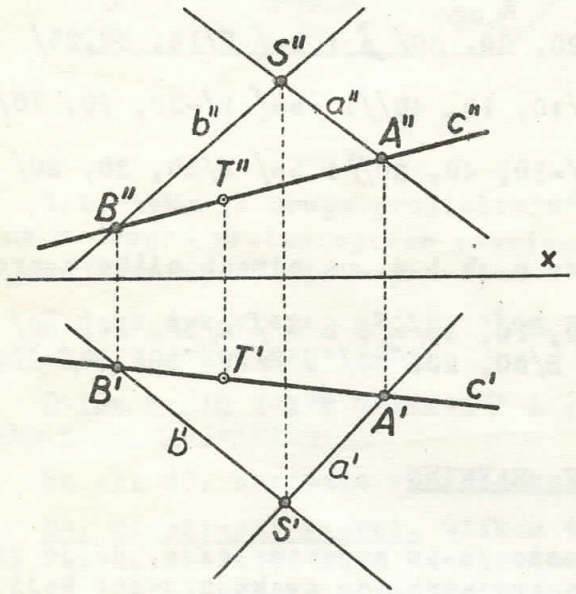
Ravninu E jednoznačno odredjuju prema tome još i ovi elementi:

1. pravac i jedna točka, koja nije na tom pravcu;

2. dva pravca, koji se sijeku;
3. dva usporedna pravca.

Uobičajeno je, da se za ravninu E, koja je odredjena pravcima a i b, upotrebljava kratica E = [a b], a za ravninu E, koja je odredjena točkom A i pravcem p, upotrebljava se kratica E = [A p].

27. Predočivanje ravnine s dva ukrštena, odnosno usporedna pravca. Kad bismo ravninu E koso postavili prema π_1 i π_2, a zatim odredili tlocrt i nacrt svake njezine točke, ispunili bi tlocrti svih njezinih točaka ravninu π_1, a nacrti ravninu π_2. Zbog toga obično uzimamo samo jedan omedjeni dio ravnine E i odredjujemo njegove normalne projekcije. Neka su na sl. 47. zadane projekcije dvaju pravaca a i b, koji se sijeku u točki S. Budući da dva ukrštena pravca a i b odredjuju jednoznačno ravninu E, možemo pomoću projekcija tih pravaca riješiti neke osnovne zadatke u vezi s tom ravninom.



Sl. 47.

A.- Imaju se nacrtati tlocrt i nacrt kojega god pravca c ravnine E. Povucimo koji god pravac c', koji sječe a' u točki A', a b' u točki B'. Ako pravac c' smatramo tlocrtom nekog pravca c ravnine E, onda on siječe u prostoru pravac a u točki A, kojoj je A' tlocrt, a pravac b u točki B, kojoj je B' tlocrt. Odredimo li sada nacrt A" točke A na a", pomoću ordinale povučene točkom A', a zatim nacrt B" točke B na b", onda će pravac [A" B"] biti nacrt c" pravca c. Tako smo dobili obje projekcije c' i c" još jednog pravca ravnine E. Pri tome konstruiranju projekcija pravca c ravnine E, mi smo uzeli po volji njegov tlocrt c', a zatim smo konstruirali njegov nacrt c", ali smo isto tako mogli uzeti po volji nacrt c" pravca c, pa konstruirati njegov tlocrt c'.

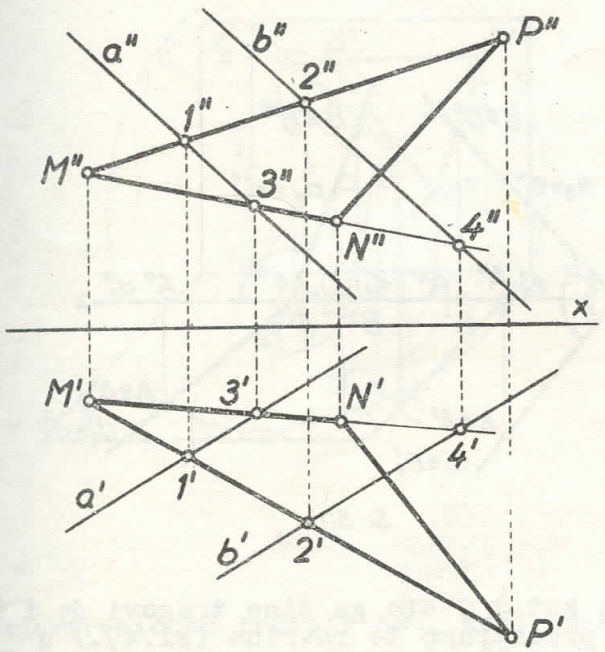
Na sl. 47. riješen je još i ovaj zadatak:

B.- Zadan je tlocrt T' neke točke T ravnine E, neka se nadje njezin nacrt. Točkom T' povucimo koji god pravac c' i smatrajmo ga tlocrtom pravca c ravnine E, koji ide točkom T. Konstruirajmo zatim, na prije pokazan način, nacrt c" pravca c. Ako sada povučemo točkom T' ordinalu, ona će presjeći c" u traženom nacrtu T" točke T.
Kako bi se, kad je zadan nacrt T" neke točke T ravnine E /sl. 47./, našao tlocrt te točke?

Na kraju ovog članka riješit ćemo još i ovaj zadatak:

C.- Zadane su projekcije dvaju usporednih pravaca a i b, te nacrt M"N"P" trokuta M N P, koji je u ravnini odredjenoj pravcima a i b, neka se nadje tlocrt toga trokuta / sl. 48. /.

Pomoću točaka 1 i 2, u kojima stranica M P toga trokuta siječe pravce a i b, odredi se najprije tlocrt M'P' stranice MP. Zatim se pomoću točke 3, u kojoj stranica MN trokuta siječe pravac a, nadje tlocrt M'N' stranice MN, a na kraju se spoje točke N'P', pa se dobije tlocrt stranice NP.



Sl. 48.

Kontrola: Ako je konstrukcija točno izvedena, moraju na istoj ordinali biti projekcije 4' i 4" točke 4, u kojoj produžena stranica MN siječe pravac b, a isto tako moraju na istoj ordinali biti projekcije one točke, u kojoj stranica NP siječe pravac b.

Pri rješavanju zadataka iz toga članka nije bila upotrebljena os x, pa smo je na slici 47., kao i na 48. mogli izostaviti.

28. Predočivanje ravnine tragovima. Vidjeli smo u članu 27. kako se neka ravnina može predočiti dvjema njezinim ukrštenim, odnosno usporednim pravcima. Ali ima slučajeva, kad je zgodnije ravninu predočiti dvjema njezinim ukrštenim pravcima, koji su u osobitom položaju. To su ona dva pravca, u kojima ravnina siječe ravnine projekcija π_1 i π_2 /sl.49./ Ti se pravci zovu tragovi ravnine, a uobičajeno je, da se oni označuju malim latinskim slovom, koje odgovara onom grčkom slovu, kojim je označena ravnina. Tako je e_1 /čitaj: trag e jedan/ prvi trag, a e_2 /čitaj: trag e dva/ drugi trag ravnine E, dok je d_1 prvi trag, a d_2 drugi trag ravnine Δ. Tragovi ravnine sijeku se u točki, koja je na osi x, jer u toj točki ravnina siječe os x. Tako se tragovi e_1 i e_2 ravnine E sijeku u točki E_x, a tragovi d_1 i d_2 ravnine Δ u točki D_x. Te se točke označuju velikim latinskim slovom, koje odgovara onom grčkom slovu, kojim je označena ravnina, s dodatkom slova x.

Uobičajeno je, da se crta punom crtom samo onaj dio prvoga traga, koji je ispred osi x na prednjem dijelu ravnine π_1, kao i onaj dio drugoga traga, koji je povrh osi x na gornjem dijelu ravnine π_2.

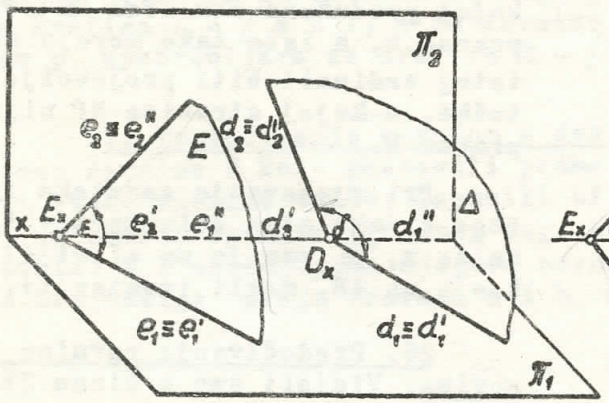
Budući da je prvi trag ravnine u π_1, to se tlocrt prvoga traga poklapa s tim tragom, a njegov je nacrt na osi x, tako je $e_1 \equiv e_1'$ i $d_1 \equiv d_1'$, dok su e_1'' i d_1'' u osi x. Kako je drugi trag ravnine u π_2, poklapa se nacrt drugoga traga s tim tragom, a njegov je tlocrt u osi x, tako je $e_2 \equiv e_2''$ i $d_2 \equiv d_2''$, dok su e_2' i d_2' u osi x.

S projekcijama svojih tragova ravnine E i Δ /sl. 50./ jednoznačno su odredjene u prostoru. Dovedemo li ravninu π_2 iz sl.50. skupa s drugim tragovima rotacijom oko osi x u vertikalan položaj, onda je s ukrštenim pravcima e_1 i e_2, odnosno d_1 i d_2, jednoznačno odredjena ravnina E, odnosno Δ.

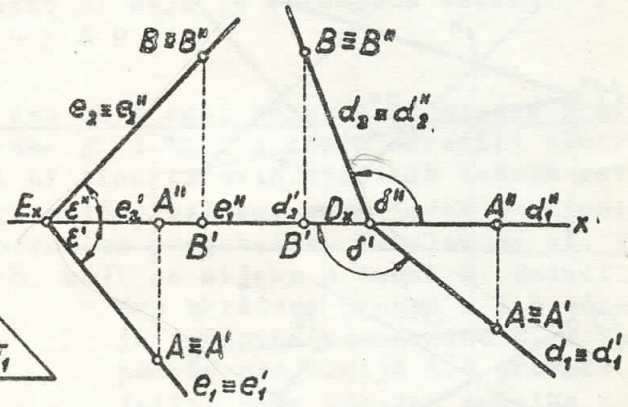
Svaka točka, koja je u prvom tragu / na pr. točka A /, imat će svoj tlocrt u istoj točki, a svoj nacrt u osi x, dok će svaka točka, koja je u drugom tragu / na pr. točka B /, imati nacrt u istoj točki, a svoj tlocrt u osi x.

Obje ravnine E i Δ iz sl. 50. kose su prema π_1 i π_2, za takve ravnine kažemo, da su u kosom ili općem položaju prema π_1 i π_2. Kraće se svaka takva ravnina zove kosa ili opća ravnina. Premda su ravnine E i Δ obje kose, ipak se one razlikuju medju sobom u ovome:

Tragovi e_1 i e_2 ravnine E sl. 50. prilaze u prvom kvadrantu točki E_x s iste strane, i to s desne strane, dok tragovi d_1 i d_2 ravnine Δ prilaze u prvom kvadrantu točki D_x s različitih strana, i to d_1 s desne strane, a d_2 s lijeve strane. Za ravninu E kažemo, da ima konvergentne tragove, dok ravnina Δ ima divergentne tragove. Kut ε, što ga zatvaraju tragovi e_1 i e_2 ravni-



Sl. 49.



Sl. 50.

ne E (sl.49.) manji je od 90°, dok je kut δ, što ga čine tragovi d_1 i d_2 ravnine Δ (sl.49.) veći od 90°. Kad promatramo te ravnine (sl.49.) u smjeru normalnog projiciranja na π_1, t.j. odozgo u smjeru okomitom na π_1, vidimo gornje strane tih ravnina, a kad ih promatramo u smjeru normalnog projiciranja na π_2, t.j. odsprijeda u smjeru okomitom na π_2, vidimo opet gornju stranu ravnine E, dok od ravnine Δ vidimo sada njezinu donju stranu.

Iz toga izvodimo ove poučke:

Ravnina, kojoj tragovi u prostoru, i to u prvom kvadrantu, zatvaraju kut manji od 90°, ima konvergentne tragove, a ona kojoj ti tragovi zatvaraju kut veći od 90°, ima divergentne tragove.

Od onog dijela neke ravnine, koji je u prvom kvadrantu, vidimo njegovu gornju stranu, kada ga gledamo u smjeru projiciranja na π_1, ili na π_2, ako ta ravnina ima konvergentne tragove, a ako ona ima divergentne tragove, onda, kad ga gledamo u smjeru projiciranja na π_1, vidimo njegovu gornju stranu, a kad ga gledamo u smjeru projiciranja na π_2, vidimo njegovu donju stranu.

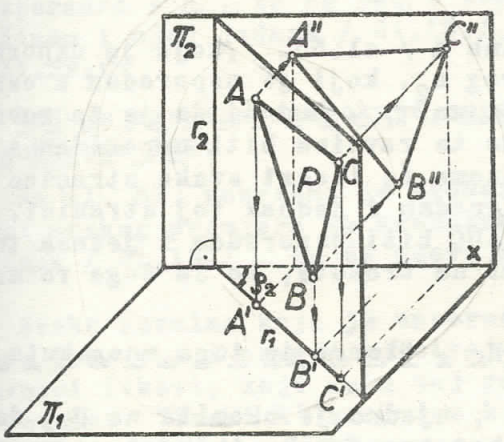
29. Predočivanje ravnina, koje su u osobitim položajima prema π_1 i π_2.

A.- Ravnina je okomita na π_1, a kosa prema π_2. Svaka ravnina koja je okomita na π_1, zove se prva projicirajuća ravnina ili prva ravnina prometalica. Ravnina P, koja je prikazana slikom 51. okomita je na π_1, a zatvara s π_2 kut φ_2. Njezin prvi trag r_1 čini sa osi x kut φ_2, a njezin je drugi trag r_2 okomit na osi x.

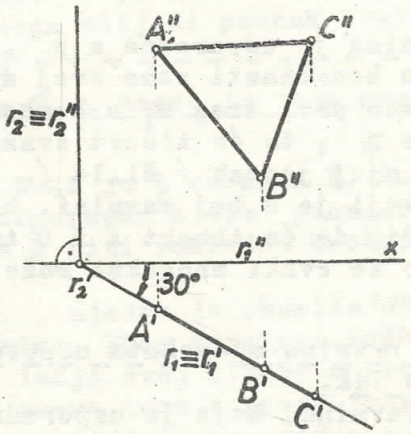
Budući da je prva zraka projiciranja AA' neke točke A ravnine P okomita na π_1, ona je u ravnini P, pa zbog toga mora tlocrt A' točke A biti u prvom tragu r_1 te ravnine. To važi i za svaku drugu točku B te ravnine, kao i za svaki ravni lik (na pr. trokut ABC), koji je u toj ravnini. Iz toga razmatranja izvodimo ovaj poučak:

Svaki ravnan lik, koji je u prvoj projicirajućoj ravnini, ima svoj tlocrt u prvom tragu te ravnine.

Na slici 52. nacrtane su projekcije tragova prve projicirajuće ravnine P, koja s osi x čini kut od 30°. Tlocrt prvoga traga čini s osi x kut od 30°, a njegov nacrt je u osi x; nacrt drugoga traga okomit je na osi x, a njegov tlocrt je točka u osi x. Na istoj slici nacrtane su još projekcije



Sl. 51



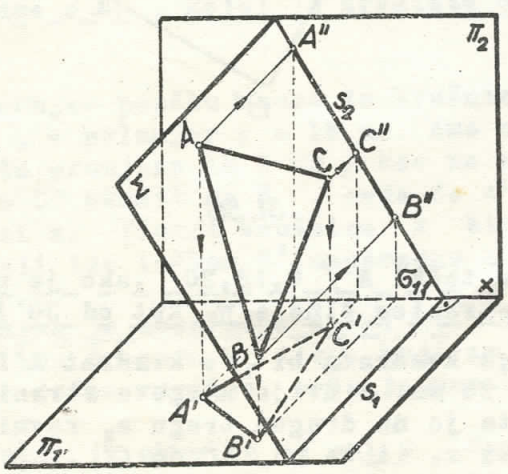
Sl. 52.

raznostraničnog trokuta ABC, koji je u toj ravnini. Njegov tlocrt je u prvom tragu ravnine, i to od A' do C' .

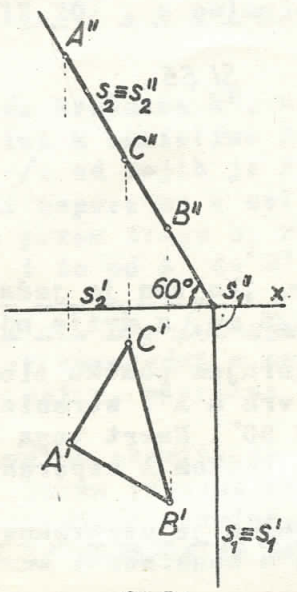
B. - Ravnina je okomita na π_2, a kosa prema π_1. Svaka ravnina, koja je okomita na π_2 , zove se druga projicirajuća ravnina ili druga ravnina prometalica. Slikom 53. prikazana je ravnina Σ , koja je okomita na π_2 , a zatvara s π_1 kut σ_1 . Njezin je prvi trag s_1 okomit na osi x, a drugi trag s_2 čini s osi x kut σ_1 .Budući da će druga zraka projiciranja svake točke te ravnine biti u toj ravnini, to će nacrt svake točke te ravnine biti u njezinom drugom tragu. To važi i za svaki ravnan lik / na pr. trokut ABC /, koji je u toj ravnini.

Svaki ravan lik, koji je u drugoj projicirajućij ravnini, ima svoj nacrt u drugom tragu te ravnine .

Na slici 54. nacrtane su projekcije tragova druge projicirajuće ravnine Σ , koja s π_1 čini kut od 60^0. Tlocrt prvoga traga okomit je na osi x, a njegov je nacrt točka u osi x; nacrt drugoga traga čini s osi x kut od 60^0 , a njegov je tlocrt u osi x.



Sl. 53.



Sl. 54.

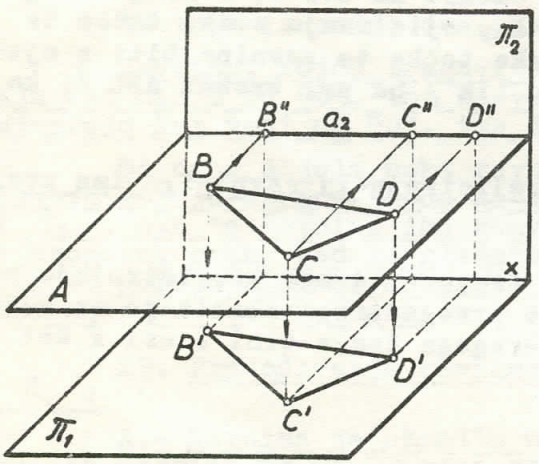
Na toj slici nacrtane su još i projekcije raznostraničnog trokuta A"C koji je u toj ravnini. Njegov nacrt je u drugom tragu, i to od A" do B".

C.- Ravnina je usporedna s π_1 . Ravnina A / sl.55. /,koja je usporedna s π_1 , ima u konačnosti samo svoj drugi trag a_2, koji je usporedan s osi x, dok je njezin prvi trag a_1 u beskonačnosti na π_1 . Budući da je ta ravnina usporedna s π_1 , to će tlocrt svake dužine te ravnine biti usporedan s tom dužinom i njoj jednak / čl.14 /. Prema tome će tlocrt svake stranice trokuta BCD, koji je u toj ravnini, biti usporedan i jednak toj stranici, a iz toga slijedi, da će tlocrt A' B' C' trokuta ABC biti usporedan i jednak trokutu ABC. Kako se svaki mnogokut može rastaviti na trokute, to iz toga razmatranja izvodimo:

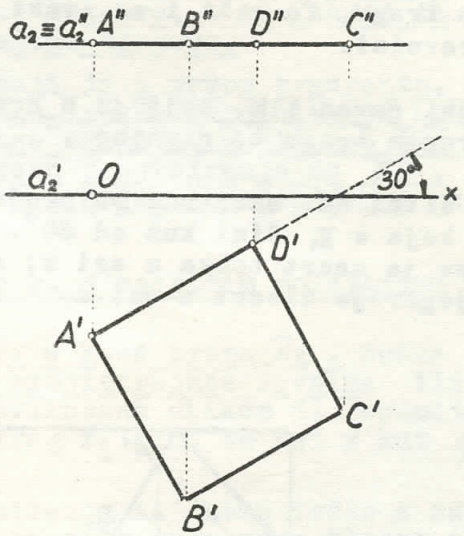
Kad je ravnina mnogokuta usporedna s π_1 , tlocrt je toga mnogokuta njemu sukladan lik.

Svaka ravnina, koja je usporedna s π_1 , ujedno je okomita na π_2, dakle je ona druga projicirajuća ravnina. Zbog toga svaka točka te ravnine, kao i trokut ABC, ima svoj nacrt u drugom tragu te ravnine.

Na sl. 56. riješen je ovaj zadatak: Nacrtaj projekcije kvadrata ABCD



Sl. 55.



Sl. 56.

usporednog s π_1 ,kojemu je jedan vrh u točki A /_O,18,20/ ,ako je njegova stranica duga 25 mm, a dvije njegove stranice čine s π_2 kut od 30° !

Prema gornjem poučku tlocrt toga kvadrata bit će kvadrat A'B'C'D',kojemu je jedan vrh u A', stranica duga 25 mm, a dvije njegove stranice čine s osi x kut od 30°. Nacrt toga kvadrata je na drugom tragu a_2 ravnine kvadrata, koji ide točkom A usporedno s osi x, i to od A" do C" .

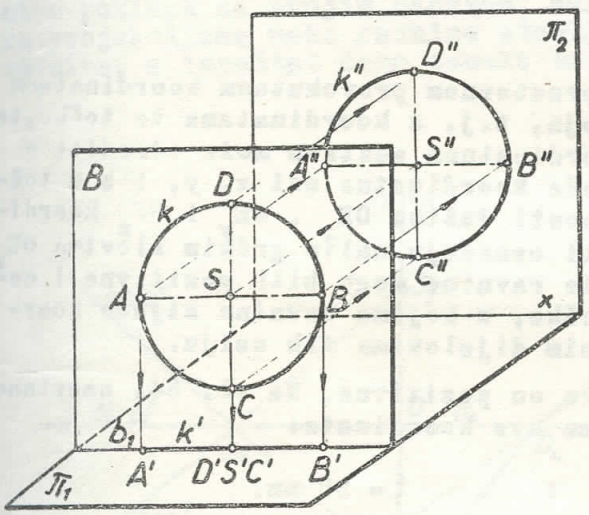
D.- Ravnina je usporedna s π_2 . Ravnina B / sl.57./,koja je usporedna s π_2 , ima u konačnosti samo svoj prvi trag b_1, koji je usporedan s osi

x, dok je njegov drugi trag b_2 u beskonačnosti na Π_2 .Budući da je ta ravnina usporedna s Π_2 , to će nacrt svake dužine te ravnine biti usporedan s tom dužinom i njoj jednak / čl.15./, a iz toga slijedi poučak analogan onome iz čl.29.C:

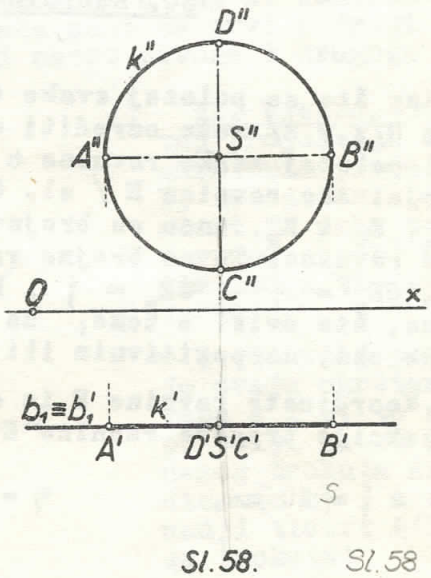
Kad je ravnina mnogokuta usporedna s Π_2 , nacrt je toga mnogokuta njemu sukladan lik.

Na sl. 57. nacrtana je kružnica k, koja je u ravnini B. Budući da će nacrt svakog promjera te kružnice biti usporedan s tim promjerom i njemu jednak / čl.15./ , to će nacrt kružnice k biti sukladna kružnica k''.

Svaka ravnina koja je usporedna s Π_2 , ujedno je okomita na Π_1 ,pa je prema tome ona i prva projicirajuća ravnina. Zbog toga sve točke, dužine i ravninski likovi, koji su u toj ravnini, imaju svoj tlocrt u prvome tragu te ravnine. Tlocrt k' kružnice k bit će prema tome u prvom tragu b_1 ravnine B od A' do B', ako je AB promjer kružnice, koji je usporedan s Π_1 .



Sl. 57.



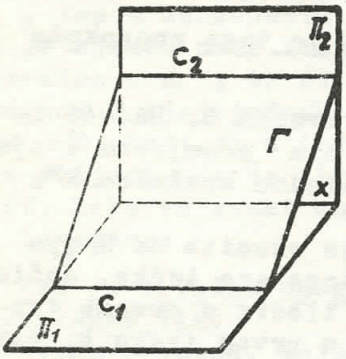
Sl.58. Sl.58

Na slici 58. riješen je ovaj zadatak: Neka se nacrtaju projekcije kružnice usporedne s Π_2 , kojoj je središte S [25,15,20] , a polumjer r = 15 mm!

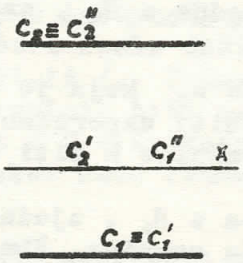
Prema gornjem poučku nacrt te kružnice bit će kružnica k'', kojoj je središte S'' , a polumjer r = 15 mm. Ako u kružnici k zamislimo dva medjusobom okomita promjera AB i CD / kao na sl. 57. /, od kojih je AB usporedan s Π_1 , a CD okomit na Π_1 , onda će $A''B''$ biti usporedan s osi x, a $C''D''$ okomit na osi x. Tlocrt kružnice k bit će na prvom tragu b_1 ravnine B te kružnice, koji ide točkom S' usporedno s osi x, i to od A' do B'.

E.- Ravnina je usporedna s osi x. Ravnina / sl. 59. /, koja je usporedna s osi x, ima tragove c_1 i c_2, koji su također usporedni s osi x. Projekcije tragova jedne ravnine, koja je usporadna s osi x, nacrtane su na sl. 60.

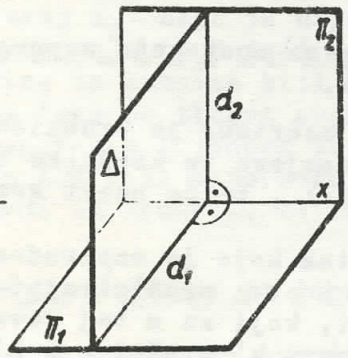
F.- Ravnina je okomita na osi x . Kad je ravnina okomita na osi x /sl. 61./, oba su njezina traga okomita na toj osi. Takva ravnina okomita je na Π_1 i na Π_2 , dakle je ona prva i druga projicirajuća ravnina. Na sl.62. nacrtane su projekcije tragova ravnine Δ , koja je okomita na osi x.



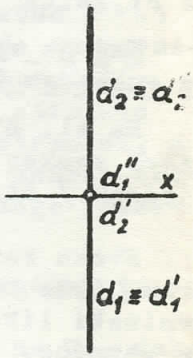
Sl. 59.



Sl. 60.



Sl. 61.



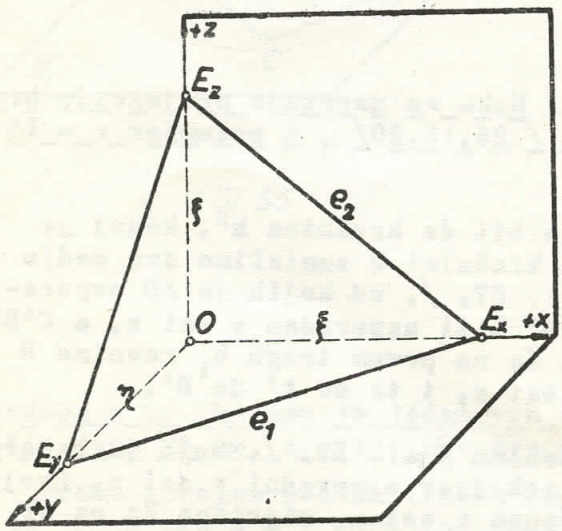
Sl. 62.

30. Koordinate ravnine

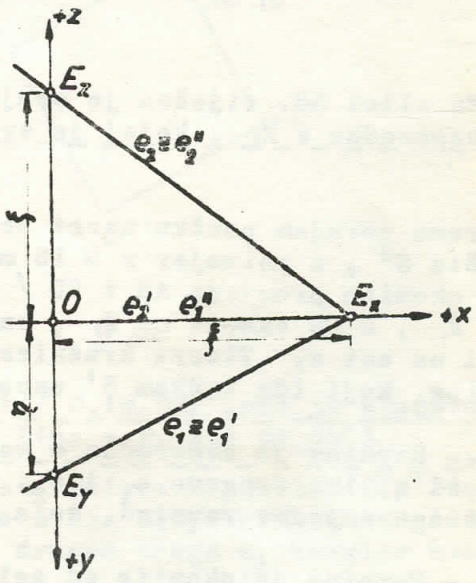
Kao što se položaj svake točke u prostornom pravokutnom koordinatnom sustavu O/x,y,z/ može odrediti s tri broja, t.j. s koordinatama te točke, tako se i položaj svake ravnine u tome koordinatnom sustavu može odrediti s tri broja. Ako ravnina E / sl. 63./ siječe koordinatne osi x, y, i z u točkama E_x, E_y i E_z, onda su brojne vrijednosti dužina OE_x, OE_y i OE_z koordinate te ravnine. Te se brojne vrijednosti označuju malim grčkim slovima $OE_x = \xi$, $OE_y = \eta$ i $OE_z = \zeta$. Koordinate ravnine mogu biti pozitivne i negativne, što ovisi o tome, da li su točke, u kojima ravnina siječe koordinatne osi, na pozitivnim ili negativnim dijelovima tih osiju.

Koordinate ravnine E iz sl.63. sve su pozitivne. Na sl. 64. nacrtane su projekcije tragova ravnine E, koja ima ove koordinate:

$\xi = 40$ mm, $\eta = 20$ mm i $\zeta = 30$ mm.



Sl. 63.



Sl. 64.

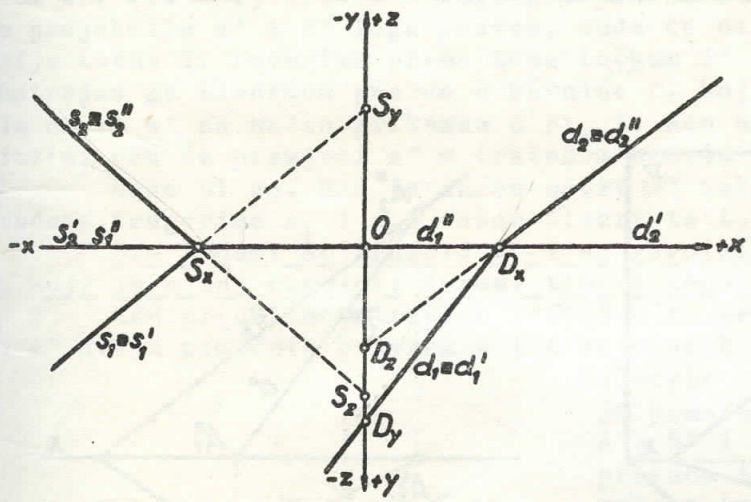
Koordinate te ravnine bilježimo kraće, kao i koordinate točke, ovako: E(4o, 2o,3o). Na slici 65 riješen je ovaj zadatak: Nacrtaj tragove ravnina Δ (2o, 25_1-15) i Σ (-25_2-$2o_2$-22)!

Najprije odredimo točke D_x(OD_x=2o) i D_y(OD_y=25). Budući da je § = -15, bit će D_z na negativnom dijelu osi z, t.j. ispod O(OD_z= -15).

Pravac $[D_xD_y]$ je $d_1 \equiv d_1'$ a pravac $[D_xD_z]$ je $d_2 \equiv d_2''$. Punom crtom crtamo onaj dio prvoga traga, koji je ispod osi x, kao i onaj dio drugoga traga, koji je povrh osi x, a ostale dijelove tih tragova crtamo isprekidanom crtom, ako ih za odredjivanje tragova trebamo nacrtati.

Ravnina Σ ima sve tri koordinate negativne, zato se točke S_x nalazi nalijevo od O, točka S_y povrh O, a točka S_z ispod O. Sada će $s_1 \equiv s_1'$ biti pravac $[S_xS_y]$, a pravac $[S_xS_z]$ bit će $s_2 \equiv s_2''$.

Napomena: Dosad smo na projekcijama neke ravnine stavljali uz oznake tragova te ravnine još i oznake projekcija tih tragova. To smo radili sbog toga, da bi početnik uočio i upamtio: Da se prvi trag ravnine poklapa sa svojim tlocrtom, a da mu je nacrt u osi x, zatim, da se drugi trag ravnine poklapa sa svojim nacrtom, a da mu je tlocrt u osi x. Ubuduće mi ćemo na projekcijama neke ravnine stavljati oznaku samo za prvi i drugi trag ravnine, a ispuštat ćemo oznake za tlocrt i nacrt prvoga i drugoga traga.



Sl. 65

31. Vježbe.- 1. Nacrtaj projekcije dvaju ukrštenih pravaca a i b, te odaberi po volji nacrt T" neke točke T ravnine [a b], a zatim nadji tlocrt T' te točke!

2. Nacrtaj projekcije dvaju ukrštenih pravaca a i b, te odaberi po volji nacrt A"B"C" nekog trokuta ABC ravnine [a b], a zatim nadji tlocrt A'B'C' toga trokuta!

3. Nacrtaj tragove ravnina: A(3o,35,∞), B(4o,∞,3o), Γ (∞,3o, 35), Δ (-3o,2o,4o), E(3o,3o,-5o), Z(-3o,-4o, 4o), H(2o,∞,∞), Θ(∞,∞,25), K(∞,25,∞)!

4. Zadana je ravnina P(-5o,∞,4o); nacrtaj projekcije trokuta ABC [A(-5o,3o,z), B(-25,15,z), C(-4o,-4o,z)], koji je u njoj!

5. Zadana je ravnina Σ (-6o,5o,∞); nacrtaj projekcije paralelograma ABCD [A(-5o,y,4o), B(-2o,y,2o), C(-15,y,5o), D], koji je u njoj!

6. Nacrtaj projekcije kvadrata ABCD, koji je usporedan s π_2, ako je njegova dijagonala AC [A(1o,2o,3o), C(5o,2o,5o)]!

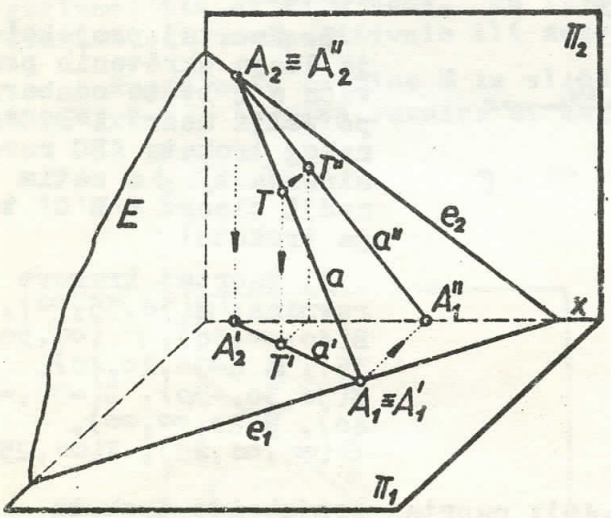
7. Nacrtaj projekcije pravokutnika ABCD, koji je usporedan s Π_2 , ako je njegova dijagonala AC/ A/0,20,50/ , C/40,20,50/ / , a stranica AB čini sa dijagonalom kut od 60°! - Napomena: Zadatak ima dva rješenja; nacrtaj oba!

8. Nacrtaj projekcije kružnice, koja je usporedna s Π_1 ,ako je jedan njezin promjer AB / A/20,15,15/ , B/40,45,15/ /!

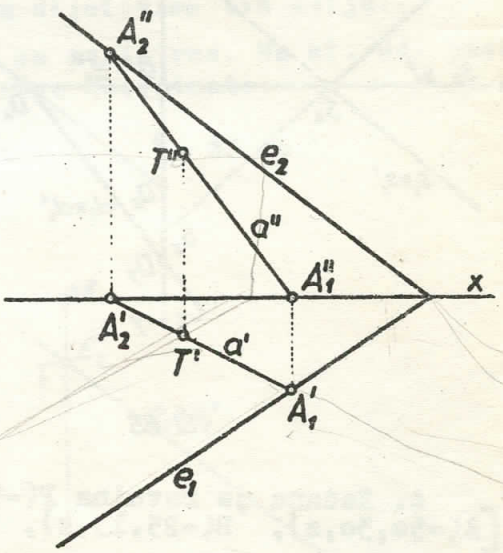
§ 5. TOČKE, PRAVCI I RAVNINE U MEDJUSOBNIM ODNOSIMA

32. Točka, pravac i ravan lik u općoj ravnini. Vidjeli smo, da se opća ravnina može prikazati s dva ukrštena pravca, ili s dva usporedna pravca, ili njezinim tragovima; a u čl. 27. riješili smo tri osnovna zadatka u vezi s tom ravninom, kad je ona bila zadana s dva ukrštena odnosno usporedna pravca. Sada ćemo te iste zadatke riješiti u vezi s općom ravninom, kad je ona zadana svojim tragovima. Slikom 66. prikazana je opća ravnina E i pravac a, koji je u njoj. On siječe tragove e_1 i e_2 ravnine E u točkama A_1 i A_2 . Točka A_1 je prvo , a točka A_2 je drugo probodište pravca a. Svaki pravac ravnine E siječe tragove te ravnine u svojim probodištima.

Prema tome: Kad je pravac u ravnini, njegovo je prvo probodište u



Sl. 66.

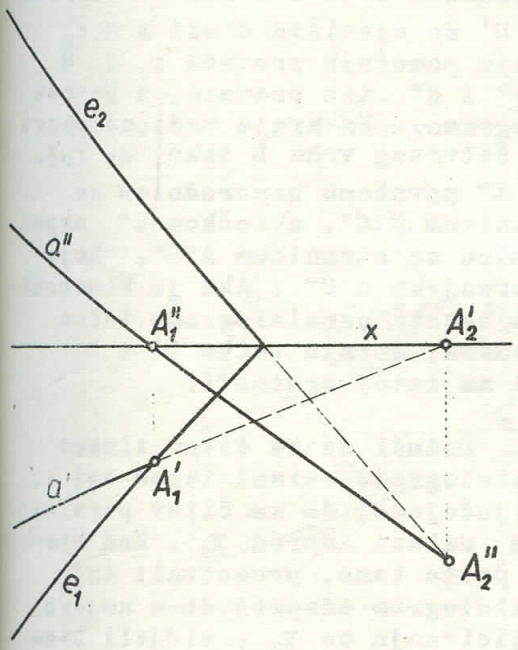


Sl. 67.

prvom, a drugo u drugom tragu te ravnine. Nakon tih objašnjenja možemo riješiti ove zadatke:

A.- Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E i tlocrt a' pravca a te ravnine; neka se nacrta njegov nacrt! (sl. 67.).

Dva ukrštena pravca, koji odredjuju ravninu E, sada su njezini tragovi e_1 i e_2, zbog toga ćemo, kao u sl. 47., presjeći tlocrte tih tragova $e'_1 \equiv e_1$ i $e'_2 \equiv x$ s tlocrtom a' pravca a. Taj tlocrt siječe $e'_1 \equiv e_1$ u tlocrtu A'_1 prvoga probodišta A_1 pravca a, a $e'_2 \equiv x$ u tlocrtu A'_2 drugoga probodišta A_2 toga pravca.



Sl. 68.

Nadjemo zatim pomoću ordinala položenih točkama A_1' i A_2' nacrte tih probodišta, i to A_1'' mora biti na $e_1'' \equiv x$, a A_2'' na $e_2'' \equiv e_2$. Traženi nacrt a" pravca a bit će dakle pravac $[A_1''\ A_2'']$. Na sl. 67. nacrtane su još i projekcije T' i T" točke T, koja je na pravcu a.

B.- Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E i nacrt a" pravca a te ravnine; neka se nacrta njegov tlocrt! (sl.68).

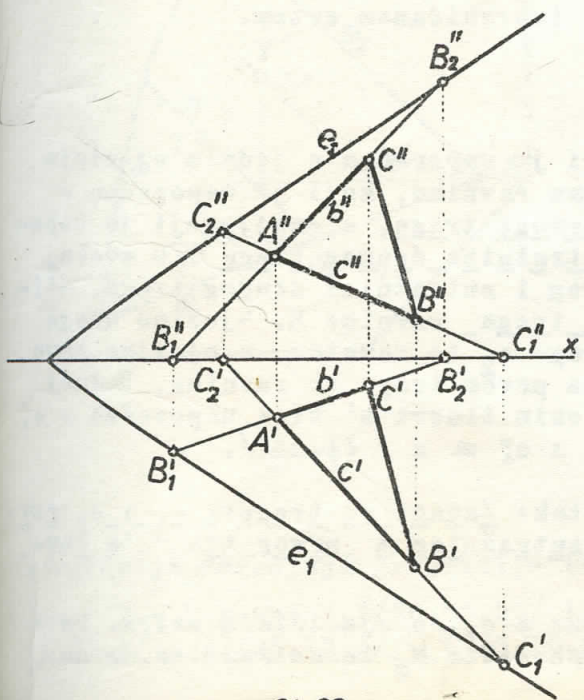
Nacrtom a" pravca a presijecimo nacrte tragova ravnine E, t.j. $e_2'' \equiv e_2$ i $e_1'' \equiv x$, pa ćemo dobiti nacrte A_2'' i A_1'', probodišta A_2 i A_1 toga pravca. Nadjimo zatim pomoću ordinala tlocrte tih probodišta na tlocrtima tragova ravnine. A_1' je na $e_1' \equiv e_1$, a A_2' je na $e_2' \equiv x$. Pravac $[A_1'\ A_2']$ je traženi tlocrt a' pravca a. Vidljivost projekcija pravca a odredimo na isti način kako smo to učinili na sl.34.

C.- Zadani su tragovi ravnine E i tlocrt T' točke T, koja je u toj ravnini; traba naći njezin nacrt! Za objašnjenje rješenja toga zadatka može nam poslužiti sl. 66., a za njezino rješenje sl. 67. Točkom T (sl. 66.) povucimo koji god pravac a u ravnini E. Ako zatim nacrtamo projekcije a' i a" toga pravca, onda će na tim projekcijama biti i projekcije točke T. Povucimo prema tome točkom T' (sl. 67.) koji god pravac a' i smatrajmo ga tlocrtom pravca a ravnine E, koji ide točkom T. Konstruirajmo zatim nacrt a" na način prikazan u čl. 4. Ako na kraju povučemo točkom T' ordinalu, ona će presjeći a" u traženom nacrtu T" točke T.

Kako bi se, kad je zadan nacrt T" neke točke T ravnine E, koja je zadana tragovima e_1 i e_2, našao tlocrt te točke? (sl. 67.).

D.- Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E i nacrt A"B"C" trokuta ABC, koji je u toj ravnini; odredi tlocrt toga trokuta! (sl. 69.)

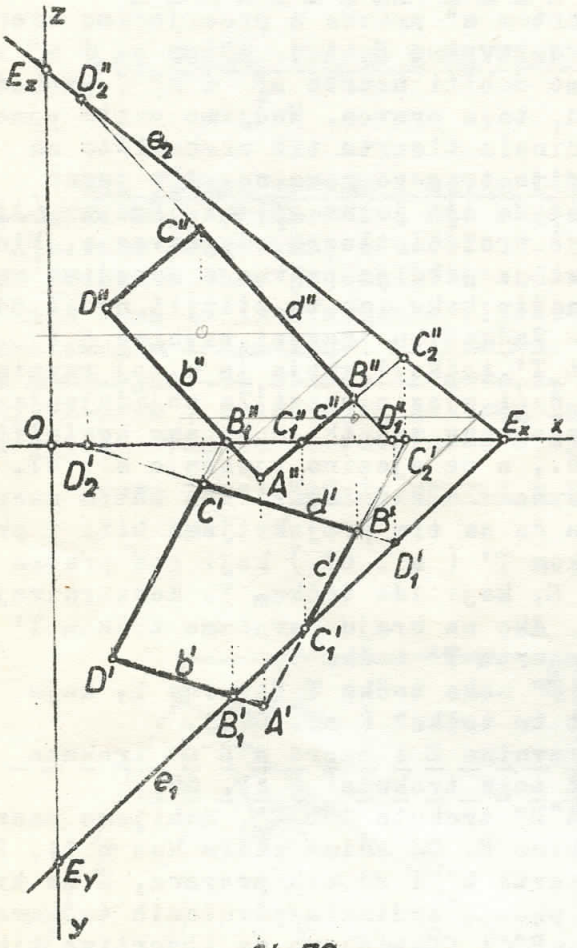
Kad produžimo stranice A"C" i A"B" trokuta A"B"C", dobijemo nacrte b" i c" dvaju pomoćnih pravaca b i c ravnine E. Odredimo zatim kao u čl. 3 tlocrte b' i c' tih pravaca, a na kraju pomoću ordinala povučenih točkama A", B" i C" nadjemo na tlocrtima tih pravaca tražene tlocrte A',B' i C' vrhova trokuta ABC.



Sl. 69.

E.- U ravnini E/60,55,50/ leži paralelogram ABCD, kojemu su zadani tlocrti njegovih vrhova A' /28,35,z/, B' /40,12,z/ i C' /20,5,z/; odredi nacrt A"B"C" toga paralelograma! (sl.70) Najprije ćemo pomoću zadanih koordinata ravnine E nacrtati njezine tragove e_1 i e_2. Od koordinata točaka A,B i C zadane su samo apscise i ordinate, a nisu aplikate, pa prema tome možemo nacrtati samo tlocrte tih točaka (čl. 6.) Budući da su u paralelogramu suprotne stranice usporedne, a istoimene projekcije usporednih pravaca su takodjer medju sobom usporedne

/ čl.23./ ,dobit ćemo tlocrt D' četvrtog vrha D toga paralelograma ovako: povući ćemo točkom A' usporednicu sa stranicom C'B' , a točkom C' usporednicu s stranicom A'B' , pa će u presjecištu tih usporednica biti D'. Sad ćemo produžiti stranice A'B' i B'C' paralelograma A'B'C'D' do sjecišta s osi x ≡ e_2 i $e_1 \equiv e_1'$, pa ćemo dobiti tlocrte c' i d' dvaju pomoćnih pravaca c i d ravnine E. Odredimo zatim, kao u čl. A, nacrte c" i d" tih pravaca, a pomoću njih i nacrte A",B" i C" vrhova A, B i C paralelograma. Na kraju nadjemo nacrt D" četvrtog vrha D tako, da točkom A" povučemo usporednicu sa stranicom B"C", a točkom C" usporednicu sa stranicom A"B", koje se presjeku u D" . Ako je konstrukcija nacrta paralelograma točno izvedena, moraju točke D' i D" biti na istoj ordinali.



Sl. 70.

Budući da se čitav tlocrt paralelograma nalazi ispod osi x, zaključujemo, da se čitav paralelogram nalazi ispred Π_2 . Kad bismo, prema tome, promatrali taj paralelogram odsprijeda u smjeru projiciranja na Π_2 , vidjeli bismo ga čitavog, pa je zbog toga čitav njegov nacrt nacrtan punom crtom.

Gornji, veći dio nacrta toga paralelograma, nalazi se povrh osi x, dok je donji, manji dio ispod te osi, a iz toga zaključujemo, da je onaj dio toga paralelograma, na kojemu su vrhovi B, C i D povrh Π_1 , dok je dio oko vrha A ispod Π_1 . Kad bismo, prema tome, promatrali taj paralelogram odozgo u smjeru projiciranja na Π_1 , ne bismo vidjeli samo onaj njegov dio, koji je ispod Π_2 , jer ga Π_2 zaklanja, pa je zbog toga tlocrt toga dijela omeđen isprekidanom crtom.

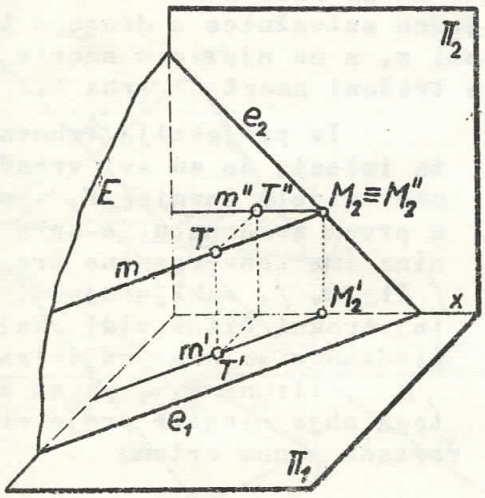
33. Sutražnice i njihova upotreba

A.- Svaki pravac neke ravnine, koji je usporedan s jednim njezinim tragom, zove se sutražnica te ravnine. Pravac ravnine, koji je usporedan s njezinim prvim tragom, zove se sutražnica prvoga traga, a onaj, koji je usporedan s njezinim drugim tragom, zove se sutražnica drugog traga . U svakoj ravnini ima neizmjerno mnogo sutražnica prvog i sutražnica drugog traga. Slikom 71. prikazana je jedna sutražnica prvog traga ravnine E. Njezino drugo probodište $M_2 \equiv M_2''$ nalazi se na drugom tragu e_2 te ravnine, a njezino prvo probodište $M_1 \equiv M_1'$ je neizmjerno daleko na prvom tragu te ravnine. Budući da je sutražnica m usporedna s e_1, mora njezin tlocrt m' biti usporedan s e_1' s e_1, a njezin nacrt m" mora biti usporedan s $e_1'' \equiv x$ / čl.23./.

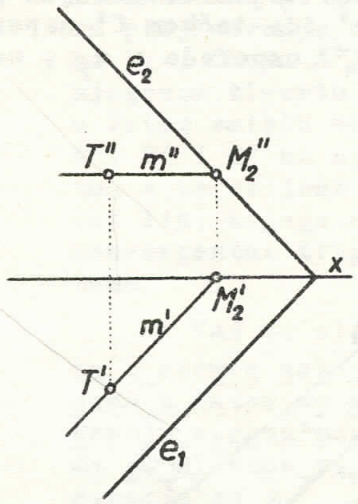
Na slici 72. riješen je ovaj zadatak: Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E; nacrtaj projekcije m' i m" jedne sutražnice m prvog traga te ravnine!

Povučemo koji god pravac m' usporedo s e_1 do sjecišta s osi x. Odredimo zatim projekcije M_2' i M_2'' drugoga probodišta M_2 te sutražnice, a na

kraju točkom M_2'' povučemo pravac m" usporedo s osi x.

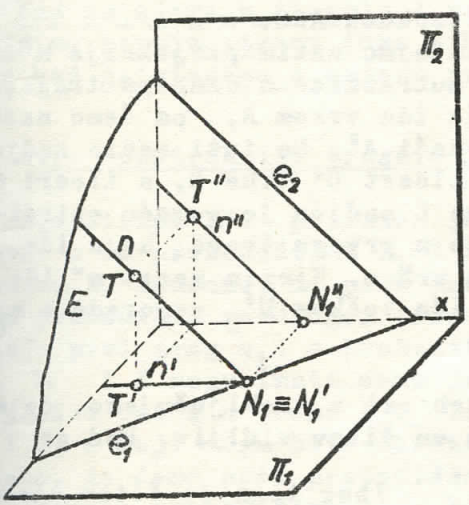


Sl. 71

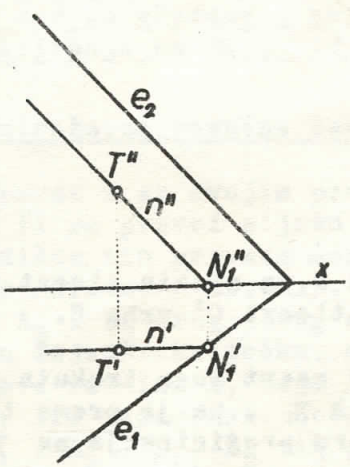


Sl. 72.

Možemo to izvesti i obrnutim redom: Povučemo k ji god pravac m" usporedo s osi x do sjecišta s e_2. Odredimo zatim projekcije M_2'' i M_1' drugoga probodišta M_2 te sutražnice, a na kraju točkom M_2' povučemo pravac m' usporedo s e_1. Na istoj slici prikazan je način, kako se pomoću sutražnice m može naći nacrt T" točke T, koja je u ravnini E, kad je zadan njezin tlocrt T', ili kako se može naći tlocrt T', kad je zadan nacrt T" neke točke te ravnine.



Sl. 73.

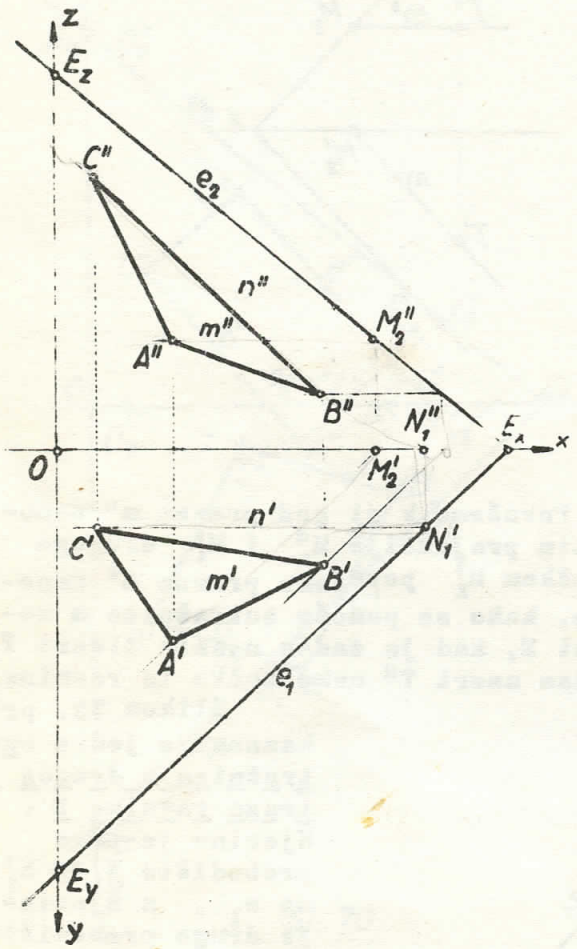


Sl. 74.

Slikom 73. prikazana je jedna sutražnica n drugog traga ravnine E. Njezino je prvo probodište $N_1 \equiv N_1'$ na e_1, a njezino je drugo probodište $N_2 \equiv N_2''$ neizmjerno daleko na e_2. Kako je sutražnica n usporedna s e_2, mora njezin tlocrt n' biti usporedan s $e_2' \equiv x$, a njezin nacrt n" mora biti usporedan s $e_2'' \equiv e_2$ / čl.23./. Na sl. 73. nacrtane su projekcije n' i n" jedne sutražnice n drugoga traga. i prikazan je način kako se pomoću tih projekcija odredjuju projekcije točke T, koja je u ravnini E.

B.- U ravnini E/60,55,50/ leži trokut ABC, kojemu je zadan tlocrt A'/15,25,z/, B'/35,15,z/, C'/5,10,z/; odredi nacrt A"B"C" toga trokuta! /sl. 75./.

Pomoću zadanih koordinata ravnine E nacrtajmo najprije njezine tragove e_1 i e_2. Budući da su od koordinata vrhova trokuta zadane samo apscise i ordinate, možemo nacrtati samo tlocrt A'B'C' trokuta ABC. Da bismo naš li nacrt A" vrha A, zamislimo tim vrhom jednu sutražnicu m prvog traga. Nacrtajmo najprije m' , a zatim m" , pa će na m" biti A". Na isti je način nadjen nacrt B" vrha B. Istim postupkom mogao bi se naći i nacrt C" vrha C, ali je na sl. 75. taj nacrt nadjen pomoću jedne sutražnice n drugoga traga. Njezin tlocrt n' ide točkom C' usporedo s osi x, a na njezinom nacrtu n", koji ide točkom N_1'' usporedo s e_2 , nalazi se traženi nacrt C" vrha C.



Sl. 75.

Iz projekcija vrhova trokuta izlazi, da su svi vrhovi u onom dijelu ravnine E, koji je u prvom kvadrantu, a kako ta ravnina ima konvergentne tragove /čl.28./, zaključujemo, da se taj trokut čitav vidi, kad ga gledamo u smjeru projiciranja na π_1 , ili na π_2 , pa su zbog toga obje njegove projekcije nacrtane punom crtom.

C.- U ravnini E/50,-35,50/ nalazi se trokut ABC, kojemu je zadan nacrt A"/50,y,15/ , B"/35, y,40/ i C"/10,y,20/ i odredi tlocrt toga trokuta. /Sl.76./

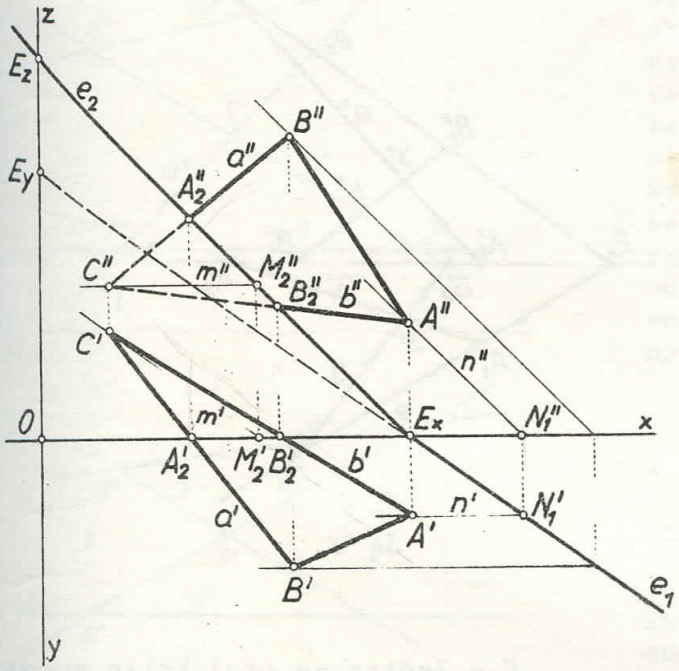
Nacrtajmo najprije pomoću zadanih koordinata ravnine E njezine tragove. Ta ravnina ima divergentne tragove . /čl. 28./. Od koordinata vrhova trokuta zadane su samo apscise i aplikate, a nisu ordinate, pa prema tome možemo nacrtati samo nacrt A"B" C" trokuta ABC.
Nacrtajmo zatim projekcije n" i n' sutražnice n drugoga traga, koja ide vrhom A, pa ćemo na n' naći A'. Na isti način nadjen je tlocrt B' vrha B, a tlocrt C' vrha C nadjen je pomoću sutražnice m prvoga traga, koja ide tim vrhom. Njezin nacrt m" ide točkom C" usporedo s osi x, a njezin tlocrt m' ide točkom M_2' usporedo s e_1. Na m' nalazi se traženi tlocrt C' vrha C.

Budući da je čitav nacrt toga trokuta povrh osi x, zaključujemo, da se čitav trokut nalazi povrh π_1 , pa je prema tome on čitav vidljiv, kad ga promatramo odozgo u smjeru projiciranja na π_1 .

Zbog toga je čitav njegov tlocrt nacrtan punom crtom.

Kako pak os x presijeca tlocrt trokuta, zaključujemo, da se taj trokut proteže iz prvoga u drugi kvadrant.

U prvom kvadrantu nalazi se njegov veći dio ABA_2B_2, a u drugom kvadrantu je njegov manji dio A_2CB_2. Kad se taj trokut promatra odsprijeda u smjeru projiciranja na π_2 , ne vidi se onaj njegov dio, koji je iza π_2 , jer ga π_2 zaklanja, pa je zbog toga nacrt toga dijela trokuta omeđen isprekidanom crtom.



Sl. 76.

D.- Gornja i donja strana ravnog lika. Trokut ABC iz slike 75. nalazi se u ravnini E, kojoj su tragovi konvergentni / čl. 28./ ,zbog toga vidimo njegovu gornju stranu, kad ga gledamo u smjeru projiciranja na Π_1 , ili na Π_2 . Slova A', B' i C' na njegovom tlocrtu poredana su u istom smislu kao i slova A", B" i C" na njegovom nacrtu, a to vrijedi za svaki ravan lik, kojega ravnina ima konvergentne tragove. Prema tome:

Kad su slova u tlocrtu i nacrtu nekog lika poredana u istom smislu, vidimo gornju stranu toga lika, bilo da ga gledamo u smjeru projiciranja na Π_1 , ili u smjeru projiciranja na Π_2 .

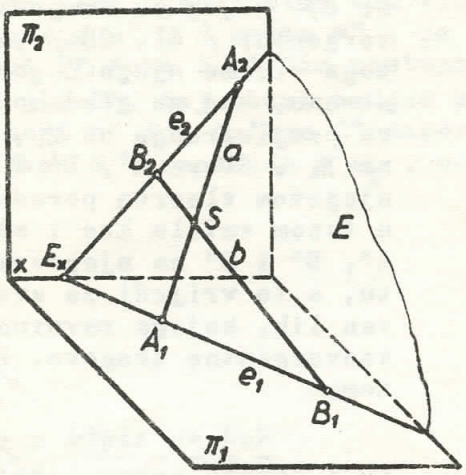
Trokut ABC iz slike 76. nalazi se u ravnini E, kojoj su tragovi divergentni, zbog toga vidimo njegovu gornju stranu, kad ga gledamo u smjeru projiciranja na Π_1 a kad ga gledamo u smjeru projiciranja na Π_2, vidimo njegovu donju stranu /čl.29./. Slova A', B' i C' na njegovom tlocrtu i slova A" B" i C" na njegovom nacrtu nisu poredana u istom, već u protivnom smislu, a to vrijedi za svaki ravan lik, kojega ravnina ima divergentne tragove. Prema tome:

Kad su slova u tlocrtu i nacrtu nekog lika poredana u protivnom smislu, vidimo gornju stranu toga lika, kad ga gledamo u smjeru projiciranja na Π_1 , a kad ga gledamo u smjeru projiciranja na Π_2 , vidimo njegovu donju stranu.

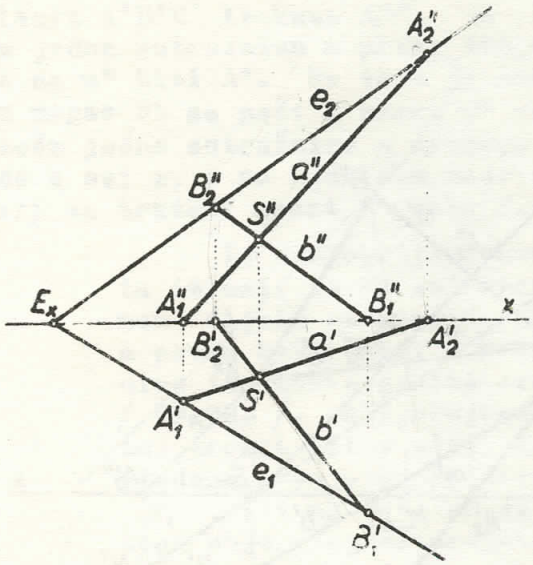
34.- Konstrukcija tragova i sutražnica ravnine zadane točkama i pravcima.

A.- Slikom 77. prikazan je pravac a sa svojim probodištima A_1 i A_2, te pravac b sa probodištima B_1 i B_2. Ti se pravci sijeku u točki S i odredjuju ravninu E. Znademo, da prva probodišta tih pravaca moraju biti na prvom, a druga probodišta na drugom tragu te ravnine / čl.32./. Probodišta A_1 i B_1 odredjuju prvi trag e_1, a probodišta A_2 i B_2 drugi trag e_2. Kako tri ravnine Π_1 , Π_2 i E mogu imati samo jednu zajedničku točku, moraju se tragovi e_1 i e_2 sjeći u osi x u točki E_x. Tragove ravnine E, koja je zadana s dva pravca a i b, a koji mogu biti ukršteni, ili usporedni, konstruirat ćemo prema tome tako, da ćemo naći probodišta A_1 , A_2 i B_1, B_2 tih pravaca, pa ćemo spojiti istoimena probodišta, t.j. biti će $e_1 \equiv [\ A_1\ B_1\ ]$, a $e_2 \equiv [\ A_2\ B_2\ ]$. Ako je konstrukcija tih tragova točno izvedena, moraju tragovi e_1 i e_2 sjeći os x u istoj točki.

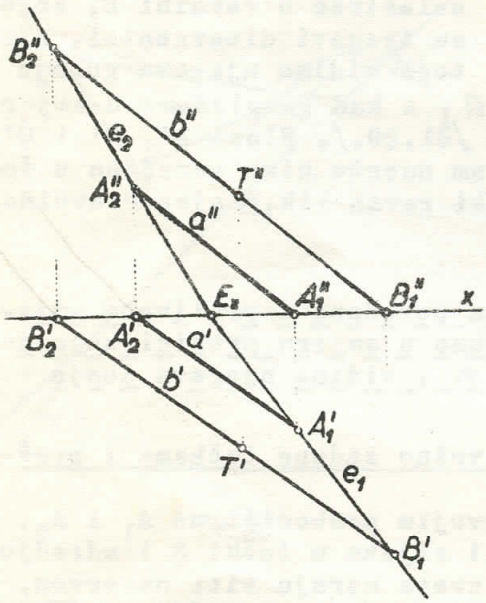
B.-Zadane su projekcije dvaju ukrštenih pravaca a i b; konstruiraj tragove ravnine E, koju ti pravci odredjuju! / sl. 78./.Najprije se nadju projekcije probodišta A_1, A_2, B_1 i B_2 tih pravaca / čl. 20./, pa je $e_1 \equiv [\ A_1\ B_1\ ]$, a $e_2 \equiv [\ A_2\ B_2\ ]$. Pravci e_1 i e_2 moraju se sjeći u točki E_x na osi x. Budući da ravnina E ima konvergentne tragove vidimo njezinu gornju stranu, bilo da je gledamo u smjeru projiciranja na Π_1 , ili u smjeru projiciranja na Π_2 , / čl.28. i 29./.



Sl. 77



Sl. 78



Sl. 79.

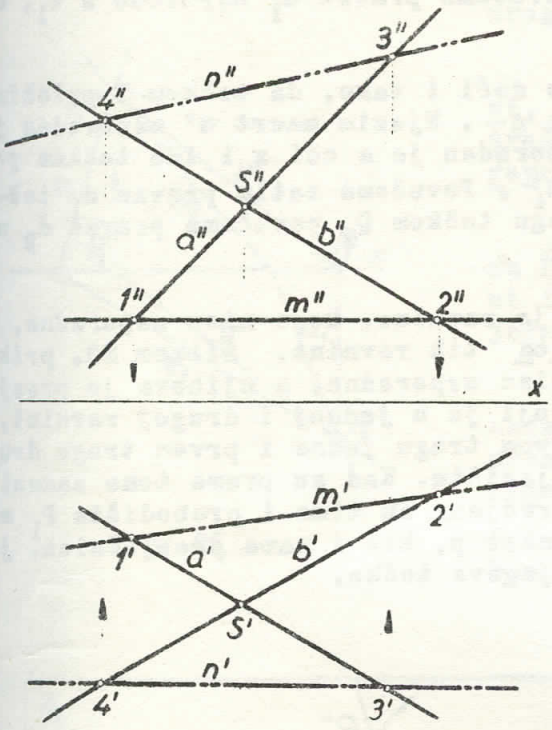
C.- Zadane su projekcije pravca a i točke T; konstruiraj tragove ravnine E, koju oni određuju / s l. 79./

Točkom T povučen se pravac b, koji je usporedan s pravcem a ($b'//a'$, $b''//a''$), a zatim se nađu projekcije probodišta A_1, A_2, B_1 i B_2 tih pravaca. Pravac / A_1' $B_1'^2$ / je prvi trag e_1, a pravac / A_2'' B_2'' / je drugi trag e_2 te ravnine. Budući da ravnina E ima sada divergentne tragove, vidimo njezinu gornju stranu, kad je gledamo u smjeru projiciranja na π_1 ,a kad je gledamo u smjeru projiciranja na π_2 ,vidimo njezinu donju stranu.

D.- Kako se mogu konstruirati projekcije sutražnice prvoga, odnosno drugoga traga neke ravnine, koja je zadana s dva ukrštena pravca, a da se pri tome ne moraju naći projekcije tragova te ravnine, vidjet ćemo u ovom zadatku:

Zadane su projekcije dvaju ukrštenih pravaca a i b; konstruiraj projekcije jedne sutražnice m prvoga traga i jedne sutražnice n drugoga traga ravnine E određene pravcima a i b! / sl. 80./.

Budući da je svaka sutražnica prvoga traga usporedna s π_1 , mora njezin nacrt biti usporedan s osi x / sl. 72./.Nacrtamo li, prema tome, koji god pravac usporedan s osi x, koji siječe a'' u točki 1'' , a b'' u točki 2'', onda taj pravac možemo smatrati nacrtom m'' neke sutražnice m prvoga traga, koja u prostoru siječe pravac a u točki 1, a pravac b u točki 2. Ako zatim pomoću ordinala odredimo na a' točku $1'$, a na b' točku $2'$, onda će pravac $m' \equiv / 1' 2' /$ biti tlocrt te sutražnice m .



Sl. 80.

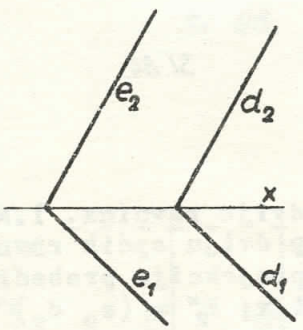
Znademo, da je svaka sutražnica drugoga traga usporedna s Π_2, pa prema tome mora njezin tlocrt biti usporedan s osi x / sl.74./. Ako nacrtamo koji god pravac usporedan s osi x, koji siječe a' u točki 3', a b' u točki 4', onda taj pravac možemo smatrati tlocrtom n' neke sutražnice n drugoga traga, koja u prostoru siječe pravac a u točki 3, a pravac b u točki 4. Odredimo li zatim pomoću ordinala na a" točku 3", a na b" točku 4", onda će pravac n" = / 3" 4" / biti nacrt te sutražnice n.

35. Dvije ravnine i njihova presječnica

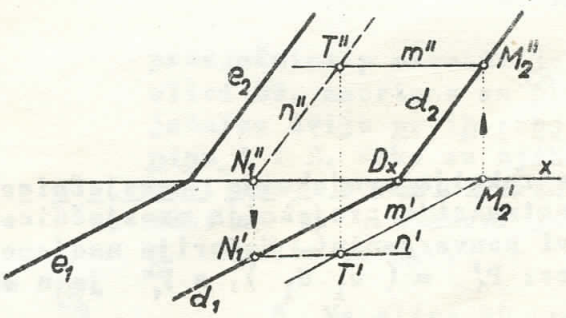
A.- Usporedne ravnine. Dvije su ravnine usporedne, kad one nemaju u konačnosti zajedničkih točaka. Poznato je iz stereometrije, da dvije medju sobom usporedne ravnine siječe neka treća ravnina u usporednim presječnicama. Prema tome će Π_1 sjeći dvije usporedne ravnine E i Δ u usporednim tragovima e_1 i d_1, a Π_2 sjeći će te ravnine opet u usporednim tragovima e_2 i d_2.

Kad su dvije ravnine medju sobom usporedne, usporedni su medju sobom i njihovi istoimeni tragovi

Na sl. 81. nacrtani su tragovi dviju medju sobom usporednih ravnina, a na slici 82. riješen je ovaj zadatak:



Sl. 81.



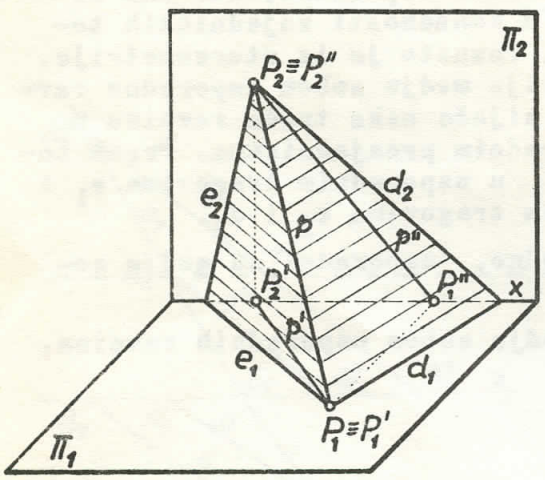
Sl. 82.

B.- Zadani su tragovi ravnine E i projekcije točke T; položi točkom T ravninu Δ usporednu s ravninom E! Budući da će istoimeni tragovi ravnina E i Δ biti medju sobom usporedni, bit će d_1 usporedan s e_1, a d_2 usporedan s e_2. Prema tome dovoljno je da nadjemo jednu točku prvog traga ravnine Δ, ili jednu točku drugog traga te ravnine, pa da položaj tih tragova bude odredjen. Položit ćemo zbog toga točkom T jednu sutražnicu m prvoga traga ravnine Δ. Njezin tlocrt m' usporedan je s e_1 i ide točkom T', njezin nacrt m" usporedan je s osi x i ide točkom T", a njezino je

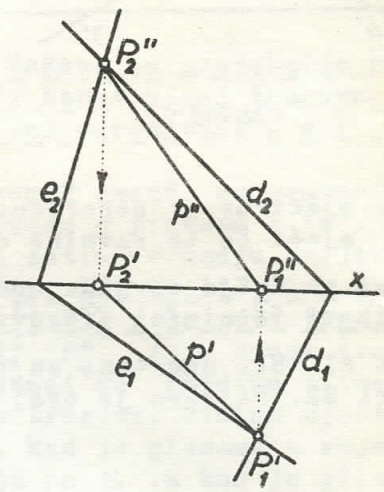
drugo probodište točka $M_2 \equiv M_2''$. Ako sada točkom M_2'' povučemo pravac d_2 usporedo s e_2 do osi x, a zatim točkom D_x povučemo pravac d_1 usporedo s e_1, dobijemo tragove ravnine Δ.

Do istih tragova ravnina Δ možemo doći i tako, da točkom T položimo jednu sutražnicu n drugoga traga ravnine Δ . Njezin nacrt n'' usporedan je s e_2 i ide točkom T'', njezin tlocrt n' usporedan je s osi x i ide točkom T', a njezino je prvo probodište točka $N_1 \equiv N_1'$. Povučemo zatim pravac d_1 točkom N_1' usporedo s e_1 do osi x, a nakon toga točkom D_x povučemo pravac d_2 usporedo s e_2, pa dobijemo tragove ravnine Δ .

C.- Presječnica dviju ravnina. Dvije ravnine, koje nisu usporedne, sijeku se u pravcu, koji se zove presječnica tih ravnina. Slikom 83. prikazane su dvije opće ravnine E i Δ , koje nisu usporedne, a njihova je presjednica p. Budući da je presječnica pravac, koji je u jednoj i drugoj ravnini, mora njezino prvo probodište P_1 biti na prvom tragu jedne i prvom tragu druge ravnine, ono će dakle biti u njihovom presjecištu. Kad su prema tome zadani tragovi e_1, e_2 i d_1, d_2 ravnina E i Δ , odredjena su time i probodišta $P_1 \equiv (e_1\ d_1)$ i $P_2 \equiv (e_2\ d_2)$ njihove presječnice p, kao i sama presječnica, jer je pravac odredjen, kad su poznate dvije njegove točke.



Sl. 83.



Sl. 84.

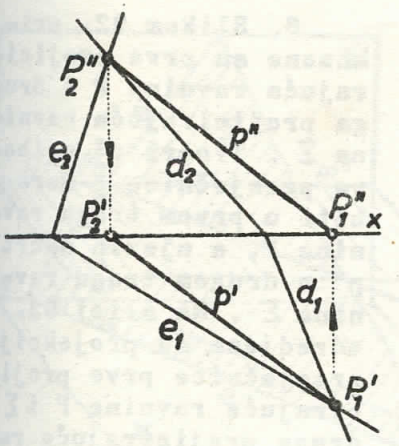
D.- Konstrukcija projekcija presječnice dviju ravnina. 1.Na slici 84. prikazana je konstrukcija projekcija presječnice p dviju općih ravnina E i Δ, kojima su tragovi konvergentni. Najprije nadjemo projekcije probodišta P_1 i P_2 te presječnice: $P_1' \equiv (e_1\ d_1)$, a P_1'' je u osi x; $P_2'' \equiv (e_2\ d_2)$, a P_2' je u osi x.
Pravac $[\ P_1'\ P_2'\ ]$ bit će tlocrt p' , a pravac $[\ P_1''\ P_2''\ ]$ bit će nacrt p'' presječnice p.

2. Slikom 85. prikazana je konstrukcija projekcija presječnice p dviju općih ravnina E i Δ , ako ravnina E ima konvergentne, a ravnina Δ divergentne tragove. Postupak je isti kao u točki 1.

3. Slikom 86. prikazane su dvije opće ravnine E i Δ , kojima su prvi tragovi usporedni, a njihova presječnica p. Budući da su prvi tragovi e_1 i d_1 tih ravnina medju sobom usporedni, prvo je probodište P_1 tih ravnina neizmjerno daleko u neizmjerno dalekom presjecištu tih tragova. Prema tome presječnica p mora ići drugim probodištem $P_2 \equiv (e_2\ d_2)$ usporedo s e_1 i d_1 ,

ona je dakle sutražnica prvoga traga jedne i druge ravnine.

Presječnica dviju ravnina, kojima su prvi, odnosno drugi tragovi usporedni, jest sutražnica prvoga, odnosno drugoga traga tih ravnina.

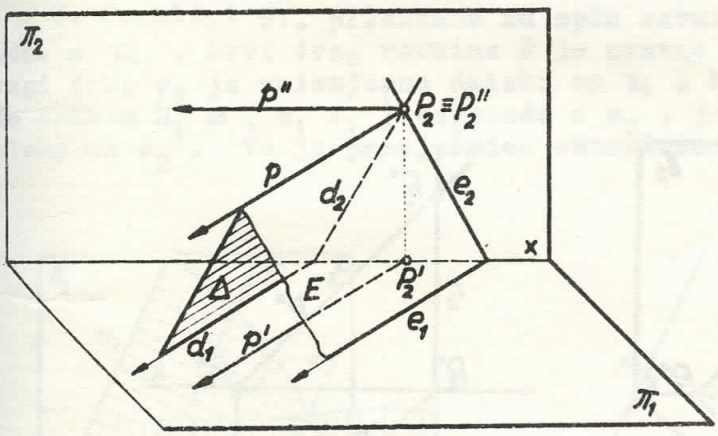


Sl. 85.

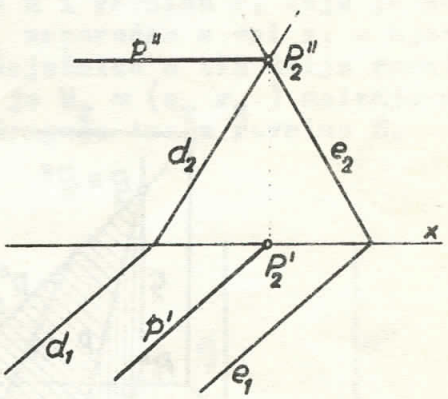
Na slici 87. nacrtani su tragovi ravnina E i △ , kojima su prvi tragovi usporedni i konstruirane su projekcije njihove presječnice.

4. Kao specijalan slučaj točke 3. imamo sada na slici 88. konstrukciju projekcija presječnica dviju drugih projicirajućih ravnina A i B.

Budući da su njihovi prvi tragovi medju sobom usporedni, ali i okomiti na Π_2, njihova



Sl. 86.

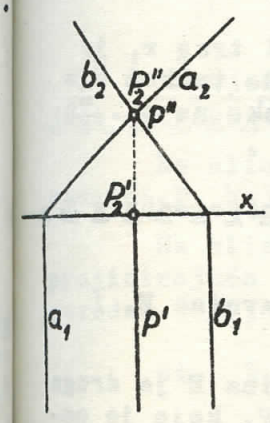


Sl. 87.

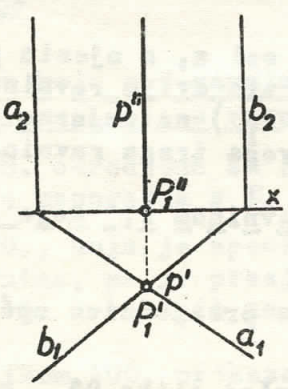
presječnica p okomita je na Π_2 . Na slici 89. nacrtane su projekcije presječnice dviju prvih projicirajućih ravnina A i B. Kako su njihovi drugi tragovi medju sobom usporedni, ali i okomiti na Π_1 , njihova je presječnica p okomita na Π_1 .

5. Na slici 90. nadjene su projekcije presječnice opće ravnine E i prve projicirajuće ravnine P. Tlocrt p' presječnice p poklapa se s prvim tragom r_1 ravnine P prema pravilu iz člana 29.A.

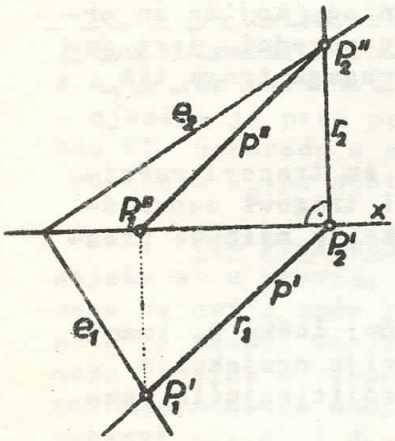
Na slici 91. prikazano je odredjivanje projekcija presječnice opće ravnine E i druge projicirajuće ravnine Σ .Prema pravilu iz čl. 29. B.sada se nacrt p'' presječnice p poklapa s



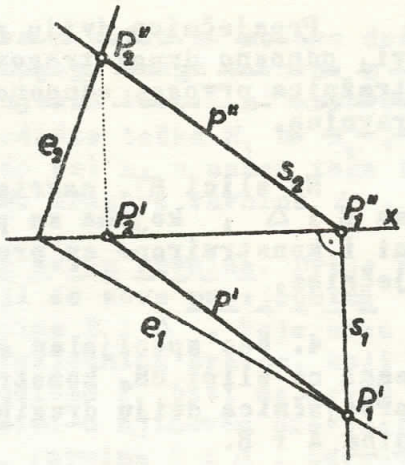
Sl. 88.



Sl. 89.



Sl. 90.

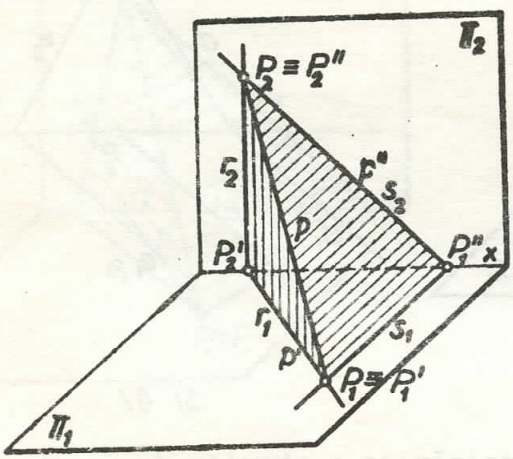


Sl. 91.

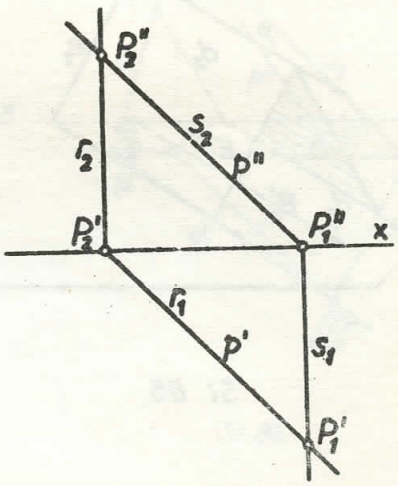
drugim tragom s_2 ravnine Σ .

6. Slikom 92. prikazane su prva projicirajuća ravnina P i druga projicirajuća ravnina Σ . Tlocrt p' njihove presječnice p mora biti u prvom tragu ravnine P, a njezin nacrt p'' u drugom tragu ravnine Σ . Na slici 93. odredjene su projekcije presječnice prve projicirajuće ravnine P i Σ druge projicirajuće ravnine

7. Slikom 94. prikazane su opća ravnina E i ravnina P, koja je usporedna s Π_1 . Dru-



Sl. 92.



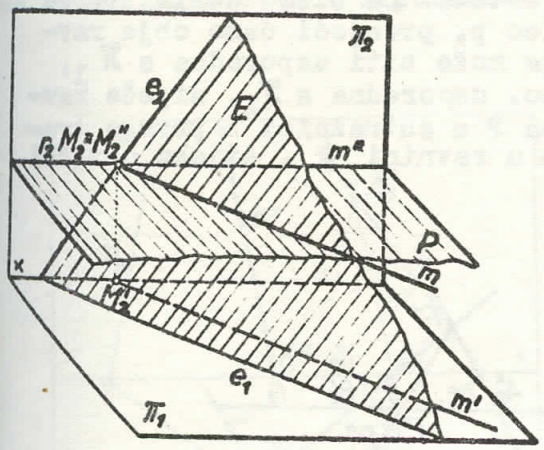
Sl. 93.

gi trag ravnine P je pravac r_2 usporedan s osi x, a njezin prvi trag r_1 je neizmjerno daleko na Π_1 . Presječnica m tih dviju ravnina ide točkom $M_2 = (e_2\ r_2)$ usporedo s e_1, jer je $M_1 = (e_1\ r_1)$ neizmjerno daleko na e_1. Ta je presječnica, prema tome, sutražnica prvoga traga ravnine E .

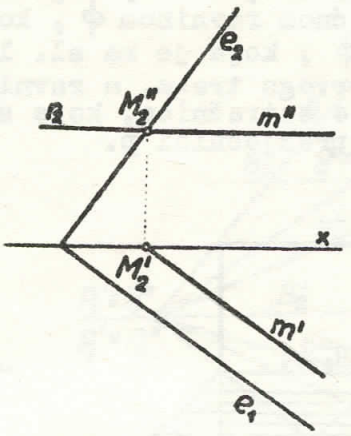
Presječnica koje_god_ravnine_E_s_ravninom P,_ koja_je usporedna s Π_1 jest_sutražnica prvoga_traga_ravnine_E.

Na slici 95. odredjene su projekcije presječnice opće ravnine E, i ravnine P, koja je usporedna s Π_1 .

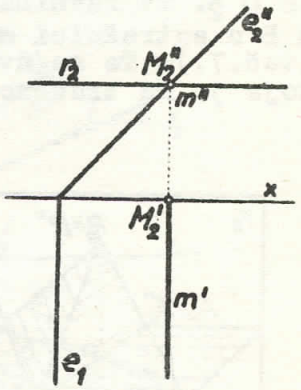
Na slici 96., koja je specijalni slučaj slike 95., ravnina E je druga projicirajuća ravnina, pa je presječnica te ravnine i ravnine P, koja je usporedna s Π_1 , pravac m okomit na Π_2 .



Sl. 94.

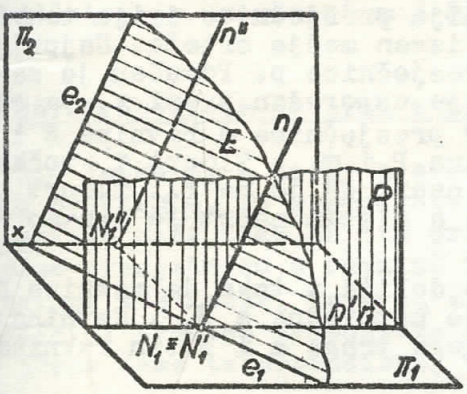


Sl. 95.

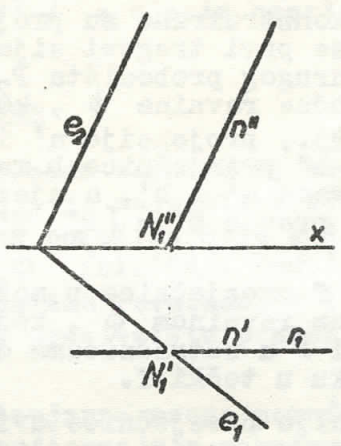


Sl. 96.

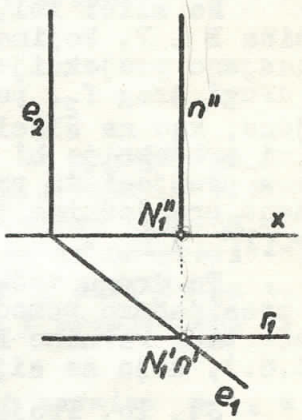
8. Na slici 97. prikazane su opća ravnina E i ravnina P, koja je usporedna s π_2 . Prvi trag ravnine P je pravac r_1 usporedan s osi x, a njezin drugi trag r_2 je neizmjerno daleko na π_2 . Presječnica n tih dviju ravnina ide točkom $N_1 \equiv (e_1\ r_1)$ usporedo s e_2 , jer je $M_2 \equiv (e_2\ r_2)$ neizmjerno daleko na e_2 . Ta je presječnica sutražnica drugoga traga ravnine E.



Sl. 97.



Sl. 98.



Sl. 99.

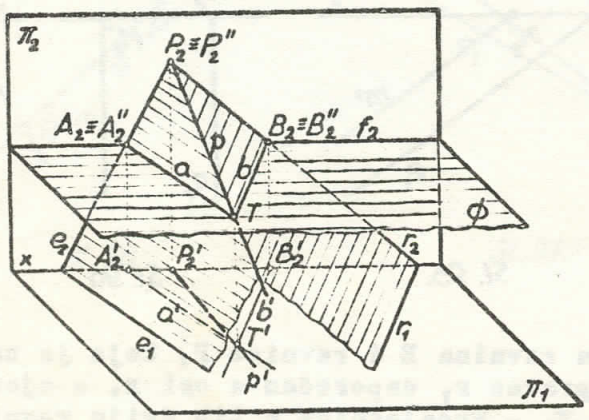
Presječnica koje god ravnine E s ravninom P, koja je usporedna s π_2 , jest sutražnica drugoga traga ravnine E .

Na slici 98. odredjene su projekcije presječnice n opće ravnine E i ravnine P, koja je usporedna s π_2 .

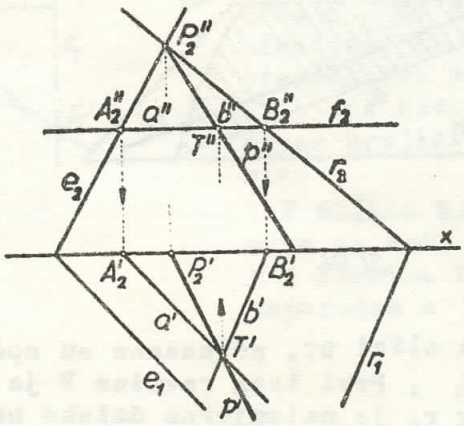
Na slici 99., koja je specijalni slučaj slike 98., ravnina E je prva projicirajuća ravnina, pa je presječnica te ravnine i ravnine P, koja je usporedna s π_2 , pravac n okomit na π_1 .

St. 9. Slikom 100. prikazane su dvije ravnine E i P, kojima se drugi

tragovi e_2 i r_2 sijeku u točki $P_2 = (e_2\ r_2)$, dok se njihovi prvi tragovi e_1 i r_1 sijeku u točki, koja je izvan medje crteža. Da bismo dobili pored točke P_2 još jednu točku T njihove presječnice p, presjeći ćemo obje ravnine jednom trećom pomoćnom ravninom Φ, koja može biti usporedna s Π_1, ili s Π_2. Ta ravnina Φ, koja je na sl. 100. usporedna s Π_1, siječe ravninu B u sutražnici a prvoga traga, a ravninu P u sutražnici b prvoga traga (toč.7.). Te se dvije sutražnice, koje su u ravnini Φ, sijeku u točki T, koja je na traženoj presječnici p.



Sl. 100.



Sl. 101.

Na slici 101, konstruirane su projekcije presječnice dviju takvih ravnina E i P, kojima se prvi tragovi sijeku izvan medje crteža. Najprije su nadjene projekcije drugog probodišta P_2 presječnice p. Povučen je zatim drugi trag f_2, pomoćne ravnine Φ, koji je usporedan s osi x, pa su nadjene, kao na slici 95., projekcije a' i a'' presječnice a ravnina E i Φ, i projekcije b' i b'' presječnice b ravnina P i Φ. Tlocrt T' točke T je u presjecištu pravaca a' i b', a njezin nacrt T'' je na f_2. Tlocrt tražene presječnice je pravac $p' = [P_2'\ T']$, a njezin nacrt je pravac $p'' = [P_2''\ T'']$.

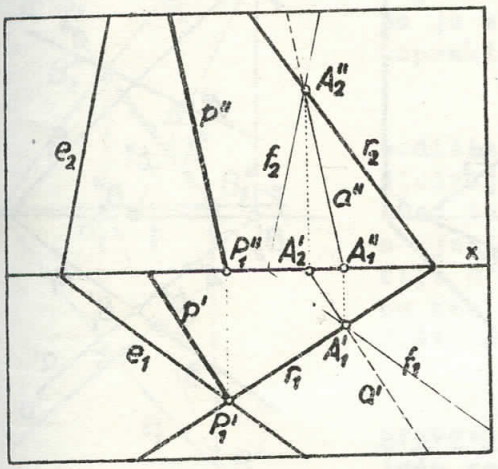
Tu drugu točku T presječnice p možemo dobiti i tako da ravnine E i P presiječemo pomoćnom ravninom Φ, koja je usporedna s Π_2. Ravnina Φ siječe tada ravnine E i P u sutražnicama drugoga traga a i b tih ravnina (toč.8.), koje se sijeku u točki T.

St. 10. Projekcije presječnice dviju ravnina E i P, kojima se drugi tragovi ne sijeku u medjama crteža, mogli bismo odrediti na jedan od ona dva načina, koji su prikazani u točki 9., ali te se projekcije mogu konstruirati još i ovim trećim načinom:

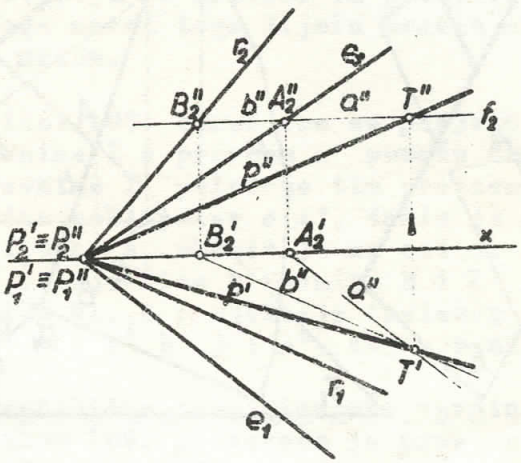
Ravninu P presiječemo pomoćnom ravninom Φ (sl.102.), koja je usporedna s ravninom E ($f_1 \parallel e_1$, a $f_2 \parallel e_2$), a kojoj tragovi f_1 i f_2 sijeku tragove r_1 i r_2. Odredimo zatim projekcije presječnice a ravnina P i Φ. Tražena presječnica p ravnina E i P bit će usporedna s presječnicom a, jer dvije medju sobom usporedne ravnine E i Φ siječe treća ravnina P u usporednim pravcima a i p. Tlocrt p' presječnice p ide prema tome točkom P' usporedo s a', a njezin nacrt p'' ide točkom P'' usporedo s a''.

St. 11. Kad ravnine E i P sijeku os x u istoj točki $E_x \equiv R_x$ (sl.103), onda je ta točka zajednička točka tih ravnina, pa ona pripada i njihovoj presječnici p. U tu točku padaju prvo i drugo probodište presječnice p i njiho-

ve projekcije. Da bismo odredili još jednu točku T te presječnice, presjeći ćemo zadane ravnine E i P pomoćnom ravninom Φ , koja je usporedna s Π_1 .



Sl. 102



Sl. 103.

Odredit ćemo zatim, kao na slici 95., projekcije presječnica a i b ravninâ E i P s ravninom Φ , koja će se presjeći u traženoj točki T. Tlocrt tražene presječnice je pravac $p' \equiv [\, P_1' \; T' \,]$, a njezin nacrt je pravac $p'' \equiv [\, P_2'' \; T'' \,]$.

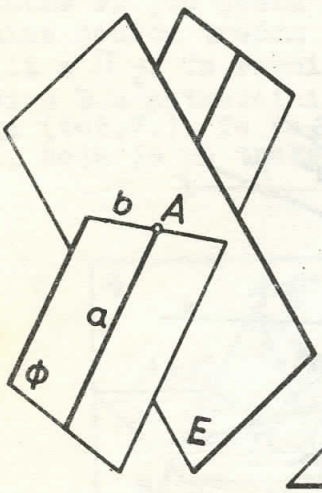
36. Probodište ravnine s pravcem

A.- Točka A, u kojoj pravac a probada ravninu E, zove se probodište ravnine E s pravcem a. To probodište, koje je zajednička točka ravnine E i pravca a, možemo naći tako da tim pravcem položimo koju god pomoćnu ravninu Φ i odredimo presječnicu b ravninâ E i Φ /sl.104/. Budući da se na presječnici b nalaze sve točke, koje su zajedničke ravninama E i Φ , biti će na toj presječnici i traženo probodište A. U presjecištu pravca a i presječnice b bit će prema tome to probodište.

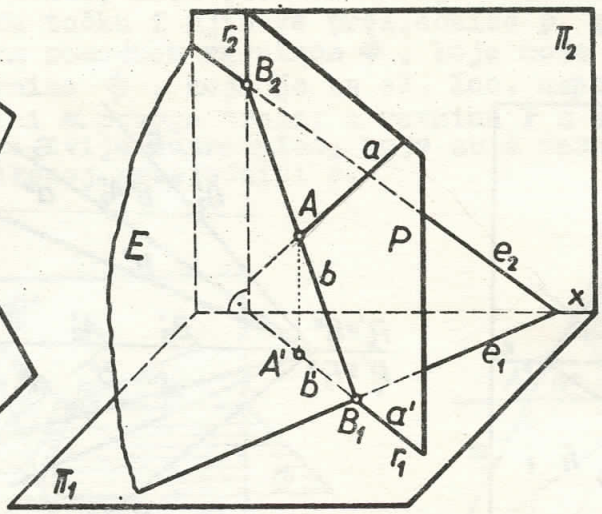
Pravcem a možemo položiti neizmjerno mnogo pomoćnih ravnina Φ , a medju njima se nalazi prva i druga projicirajuća ravnina. Te se ravnine obično upotrebljavaju pri odredjivanju probodišta A, jer je konstrukcija presječnice ravnine E s jednom projicirajućom ravninom jednostavnija od konstrukcije presječnice dviju općih ravnina. Tako je na slici 105. prikazano odredjivanje probodišta ravnine E s pravcem a pomoću prve projicirajuće ravnine P položene pravcem a. Prvi se trag r_1 te ravnine poklapa s tlocrtom a' pravca a /čl.29.A/ , a njezin drugi trag r_2 je okomit na osi x. Ravnine E i P presijecaju se u pravcu $b \equiv [\, B_1 \; B_2 \,]$, na kojemu je traženo probodište $A \equiv (a \; b)$.

Na slici 106. riješen je ovaj zadatak: Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E i projekcije a' i a'' pravca a; neka se odrede projekcije probodišta A ravnina E s pravcem a!

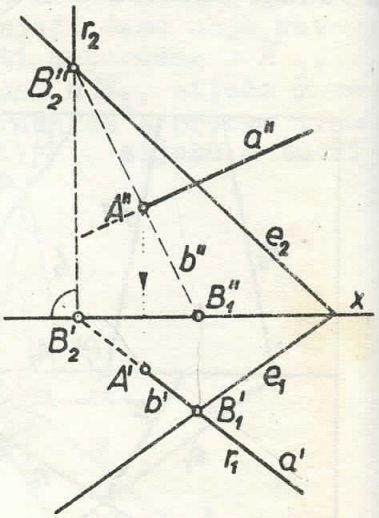
Prvi trag r_1 prve projicirajuće ravnine P položene pravcem a, poklapa se s a' , dakle je $r_1 \equiv a'$, a njezin drugi trag r_2 okomit je na osi x. Projekcije b' i b'' presječnice b ravninâ E i P nacrtaju se kao na slici 90. U presjecištu pravaca a'' i b'' nalazi se nacrt A'' traženog probodišta A, a u pre-



Sl. 104.



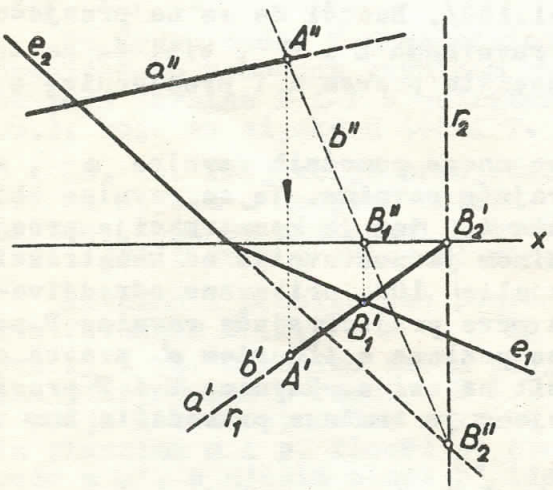
Sl. 105.



Sl. 106.

sjecištu ordinale položene točkom A" i pravca a' bit će njegov tlocrt A'.

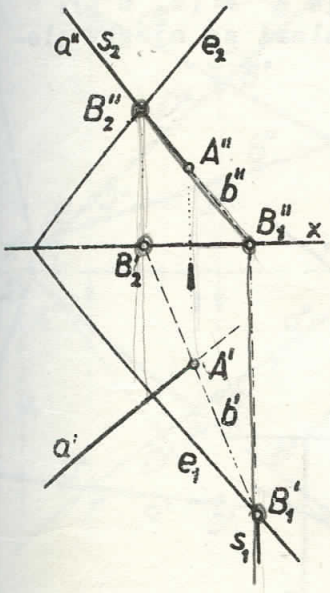
Probodište A nalazi se u onom dijelu ravnine E, koji je u prvom kvadrantu, a kako ta ravnina ima konvergentne tragove, vidimo gornju stranu te ravnine i probodište A / sl.105./, bilo da ih promatramo odozgo, bilo odsprijeda / čl.28./. Ako je ravnina E neprozirna, onda nam ona sakriva, u jednom i drugom slučaju, onaj dio pravca a, koji je ispod nje, a to je onaj dio pravca, koji je na slici 105. nalijevo od probodišta A, pa su zbog toga na slici 106. nacrtane projekcije toga dijela pravca isprekidanom crtom.



Sl. 107.

Na slici 107. riješen je isti zadatak kao i na slici 106.,samo sada ravnina E ima divergentne tragove. Opet se pravcem a položi prva projicirajuća ravnina P, i potraže projekcije presječnice b ravnine E i P. Prvi tragovi ravnina E i P sijeku se u točki B_1', koja je ispod osi x,kao i na slici 106. , ali se njihovi drugi tragovi sijeku u točki B_2'' , koja nije povrh osi x,kao na slici 106., već je sada ispod nje. Nadju se zatim na osi x točke B_1'' i B_2' , pa je tlocrt presječnice b pravac b' ≡ [B_1' B_2'], a njezin nacrt je pravac b" ≡ [B_1'' B_2''] . Projekcije traženog probodišta A su točka A" ≡ (a" b") i točka A' na a'. Budući da ravnina E ima sada divergentne tragove, vidimo gornju stranu te ravnine, kada je promatramo odozgo, a kada je promatramo odsprijeda, vidimo njezinu donju stranu / čl.28./. Prema tome će nam ta ravnina, kad je promatramo odozgo, zakrivati onaj dio pravca a, koji je ispod nje, t.j. onaj

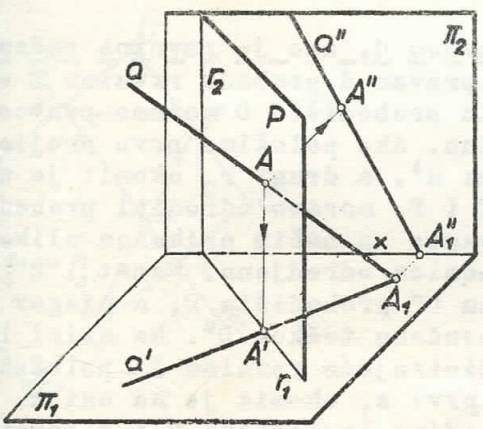
dio, koji je nalijevo od probodišta A., pa je zbog toga tlocrt toga dijela pravca nacrtan isprekidanom crtom. Promatramo li tu ravninu odsprijeda, ona nam sakriva onaj dio pravca a, koji je iza nje, t.j. onaj dio, koji je nadesno od probodišta A, pa je zbog toga nacrt toga dijela pravca nacrtan isprekidanom crtom.



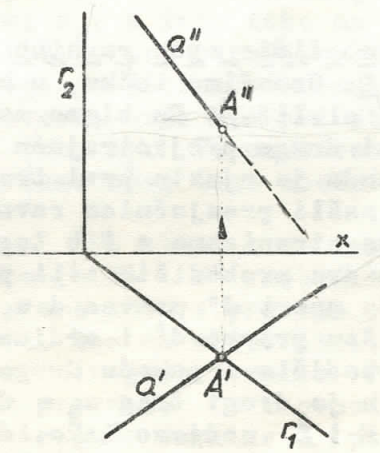
Sl. 108.

Na slici 108. određene su projekcije probodišta A ravnine E s pravcem a pomoću druge projicirajuće ravnine Σ položene tim pravcem. Drugi trag te ravnine poklapa se s a", dakle je $s_2 \equiv a''$, a njezin prvi trag s_1 okomit je na osi x. Projekcije b' i b" presječnice b ravninâ E i Σ nađene su kao na slici 91., a projekcije traženog probodišta A su A' ≡ (a' b') i A", koja je na a".

B.- Probodište projicirajuće ravnine s pravcem. Slikom 109. prikazana je prva projicirajuća ravnina P s tragovima r_1 i r_2, te pravac a s projekcijama a' i a" . Probodište A je zajednička točka ravnine P i pravca a. Budući da sve točke ravnine E imaju svoj tlocrt u njezinom prvom tragu r_1 / čl.20.A./, bit će i tlocrt A' probodišta A u r_1, a kako je točka A i na pravcu a, mora njezin tlocrt A' biti i na tlocrtu a' pravca a, pa prema tome mora A' biti u presjecištu pravaca r_1 i a'. Na temelju toga razmatranja određene su na slici 110. projekcije probodišta prve projicirajuće ravnine P s pravcem a . Tlocrt toga probodišta je točka A' ≡ (r_1 a'), a njegov nacrt A" je u presjecištu pravca a" i ordinale povučene točkom A'



Sl. 109.

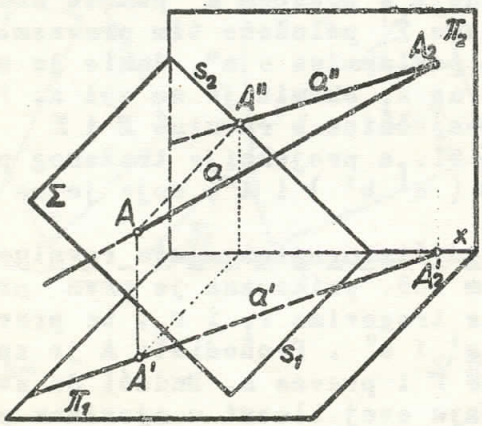


Sl. 110.

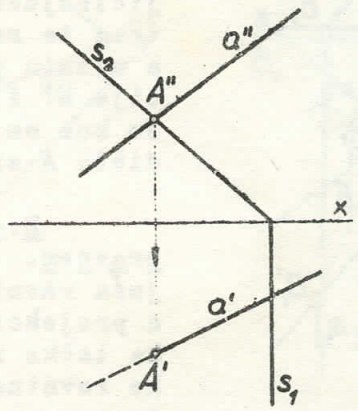
Kad promatramo ravninu P i pravac a odozgo, vidimo čitav pravac, jer nam se ravnina P prikaže kao pravac r_1 , zbog toga je na slici 110. čitav tlocrt pravca a nacrtan punom crtom. Ako pak promatramo ravninu P i pravac a odsprijeda, ne vidimo onaj dio pravca, koji je nadesno od probodišta A , jer ga sakriva ravnina, pa je zbog toga nacrt toga dijela pravca nacrtan isprekidanom crtom.

Na slici 111. prikazana je druga projicirajuća ravnina Σ s tragovima

s_1 i s_2, pravac a s projekcijama a' i a", te probodište A s projekcijama A' i A" . Budući da je točka A u ravnini Σ , mora njezin nacrt A" biti u drugom tragu s_2 te ravnine / čl.29.B/, a kako je točka A i na pravcu a, mora njezin nacrt biti na nacrtu a" pravca a, pa prema tome mora A" biti u presjecištu pravaca s_2 i a". Na slici 112. odredjene su projekcije probodišta druge projicirajuće ravnine Σ i pravca a. Nacrt toga probodišta je A" = (s_2 a"), a u presjecištu pravaca a' i ordinale povučene točkom A" nalazi se njegov tlocrt A'.



Sl. 111.



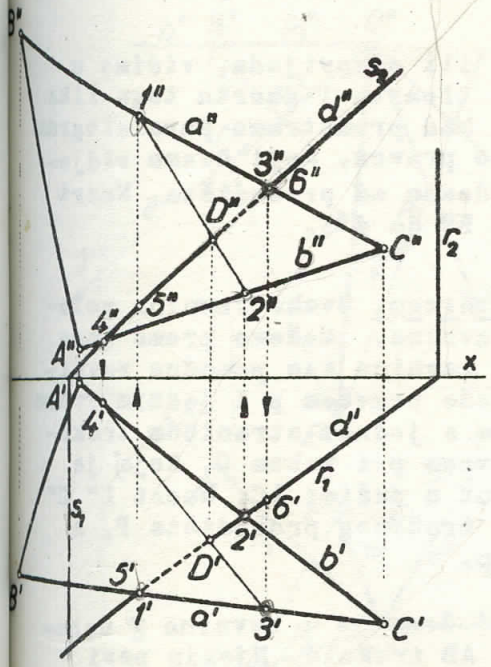
Sl 112.

Kad promatramo ravninu Σ i pravac a odozgo, ne vidimo onaj dio pravca, koji je nalijevo od probodišta A , jer ga sakriva ravnina, pa je zbog toga na slici 112, tlocrt toga dijela pravca nacrtan isprekidanom crtom. Ako ih pak promatramo odsprijeda, vidimo čitav pravac, jer nam se ravnina Σ prikaže kao pravac s_2, pa je zbog toga čitav nacrt pravca a nacrtan punom crtom.

St. C.- Probodište opće ravnine s pravcem d, ako je ravnina zadana s tri točke A, B i C. Označimo točku, u kojoj pravac d probada ravninu E = / A B C / slovom D / sl.113./. Da bismo našli to probodište D možemo pravcem d položiti prvu, ili drugu projicirajuću ravninu. Ako položimo prvu projicirajuću ravninu Γ, onda je njezin prvi trag $r_1 \equiv d'$, a drugi r_2 okomit je na osi x. Da bismo našli presječnicu ravninâ E i P, moramo odrediti probodišta 1 i 2 ravnine P sa stranicama a i b toga trokuta na način prikazan slikom 110., jer će s ta dva probodišta biti presječnica odredjena. Nacrt [1"2"] te presječnice siječe nacrt d" pravca d u nacrtu D" probodišta D, a njegov tlocrt D' je u presjecištu pravca d' i ordinale povučene točkom D". Na slici 113. nadjeno je to probodište i pomoću druge projicirajuće ravnine Σ položene pravcem d. Njezin je drugi trag $s_2 \equiv d"$, a prvi s_1 okomit je na osi x. Presječnicu ravninâ E i Σ nadjemo tako, da odredimo probodišta 3 i 4 ravnine Σ sa stranicama a i b kao na slici 112., jer će s ta dva probodišta biti presječnica odredjena. Tlocrt [3'4'] te presječnice siječe tlocrt d' pravca d u tlocrtu D' probodišta D, a njegov je nacrt D" u presjecištu pravca d" i ordinale povučene točkom D' .

Koji dio pravca d sakriva trokut ABC, kada ih promatramo odozgo, možemo odrediti ovako: Pravac d i stranica a su dva mimoilazna pravca / čl. 24./. Njihovi se tlocrti a' i d' sijeku u točki, koju označimo s 1' i 5', jer je ona tlocrt točke 1 stranice a i tlocrt točke 5 pravca d. Odredimo zatim na d" nacrt 5" točke 5.

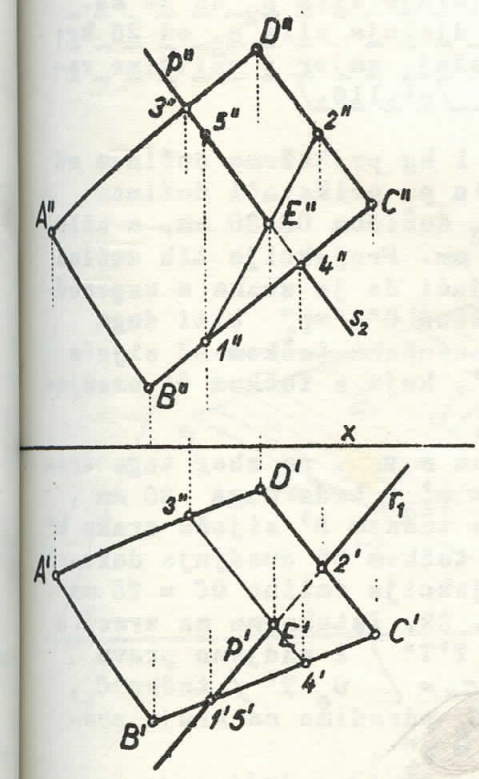
Budući da je 5" ispod 1", zaključujemo, da je točka 5 pravca d ispo



Sl. 113.

točke 1 stranice a, pa prema tome ne ćemo vidjeti onaj dio pravca d, koji je izmedju probodišta D i točke 5, kad pravac i trokut promatramo odozgo, zbog toga je tlocrt toga dijela pravca nacrtan isprekidanom crtom.

Da bismo našli, koji dio pravca d sakriva trokut ABC, kad ih promatramo odsprijeda, potražimo točku, u kojoj se sijeku nacrti a" i d" stranice a i pravca d. Tu točku označimo sa 3" i 6", jer je ona nacrt točke 3 stranice a i nacrt točke 6 pravca d. Odredimo zatim na d' tlocrt 6' točke 6. Budući da je 6' iza 3', zaključujemo, da je točka 6 pravca d iza točke 3 stranice a, pa prema tome ne ćemo vidjeti onaj dio pravca d, koji je izmedju probodišta D i točke 6, kad pravac i trokut promatramo odsprijeda, zbog toga je nacrt toga dijela pravca nacrtan isprekidanom crtom.



Sl. 114.

St. D.-Probodište paralelograma ABCD s pravcem p. Ako pogledamo slike 110. i 113., opazit ćemo, da pri odredjivanju probodišta prve projicirajuće ravnine s nekim pravcem nije igrao nikakcu ulogu njezin drugi trag r_2, a isto tako na slikama 111. i 113., pri odredjivanju probodišta druge projicirajuće ravnine s nekim pravcem, nije bio potreban njezin prvi trag s_1. Te nepotrebne tragove ne ćemo zbog toga ubuduće ni crtati.

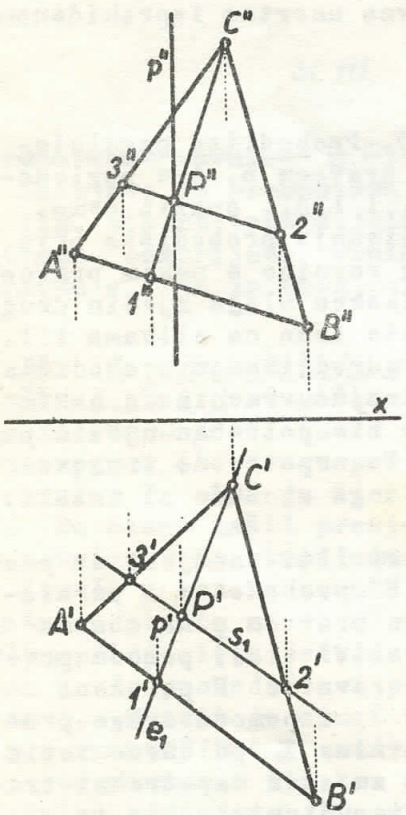
Na slici 114. nadjene su projekcije E' i E" probodišta E paralelograma ABCD s pravcem p na oba načina, kao na slici 113., pomoću prve projicirajuće ravnine P položene tim pravcem, i pomoću druge projicirajuće ravnine Σ položene istim pravcem, samo su sada nepotrebni tragovi r_2 i s_1 ispušteni.

Da bismo našli, koji dio pravca p sakriva paralelogram, kad ih promatramo odozgo, uzmimo u pomoć, na pr. stranicu BC toga paralelograma. Ona se s pravcem p mimoilazi, a točke zaklonice na njima s obzirom na Π su točke 1 i 5. Budući da je 5" iznad 1", zaključujemo, da je onaj dio pravca, koji je od probodišta na lijevo, a na kojemu je točka 5, iz-

nad paralelograma, dok je onaj dio pravca, koji je nadesno od probodišta, ispod paralelograma, pa je zbog toga tlocrt p' pravca p nacrtan isprekidanom crtom od E' do 2' .

Kad promatramo paralelogram ABCD odozgo, ili odsprijeda, vidimo u oba slučaja njegovu gornju stranu, jer su slova u tlocrtu i nacrtu toga lika poredana u istom smislu / čl.33.D/ ,pa zbog toga, kad promatramo paralelogram i pravac odsprijeda, ne ćemo vidjeti opet onaj dio pravca, koji nismo vidjeli, kad smo ih promatrali odozgo, a taj je bio nadesno od probodišta. Nacrt p" pravca p nacrtan je zato isprekidanom crtom od E" do 4" .

St. E.- Probodište trokuta vertikalnim pravcem. Svaka ravnina položena vertikalnim pravcem je prva projicirajuća ravnina. Možemo prema tome pravcem p / sl.115./ položiti koju god vertikalnu ravninu kao pomoćnu ravninu, ali se obično upotrebljavaju one, koje se polože pravcem p i jednim vrhom trokuta, ili one koje se polože pravcem p usporedo s jednom stranicom trokuta. Tako je na slici 115. položena ravnina E pravcem p i vrhom C, kojoj je prvi trag $e_1 \equiv (\ p'\ C'\ )$. Ta ravnina siječe trokut u dužini 1C. Nacrt 1" C" te dužine presijeca nacrt p" pravca p u nacrtu P" traženog probodišta P, a njegov se tlocrt P' poklapa s tlocrtom p' pravca p.



Sl. 115.

Pravcem p položena je i ravnina Σ usporedo sa stranicom AB trokuta. Njezin prvi trag s_1 usporedan je s A'B'. Ta ravnina siječe trokut u dužini 2 3, a nacrt 2" 3" te dužine presijeca nacrt p" pravca p u već prije nadjenom nacrtu P" traženog probodišta P.

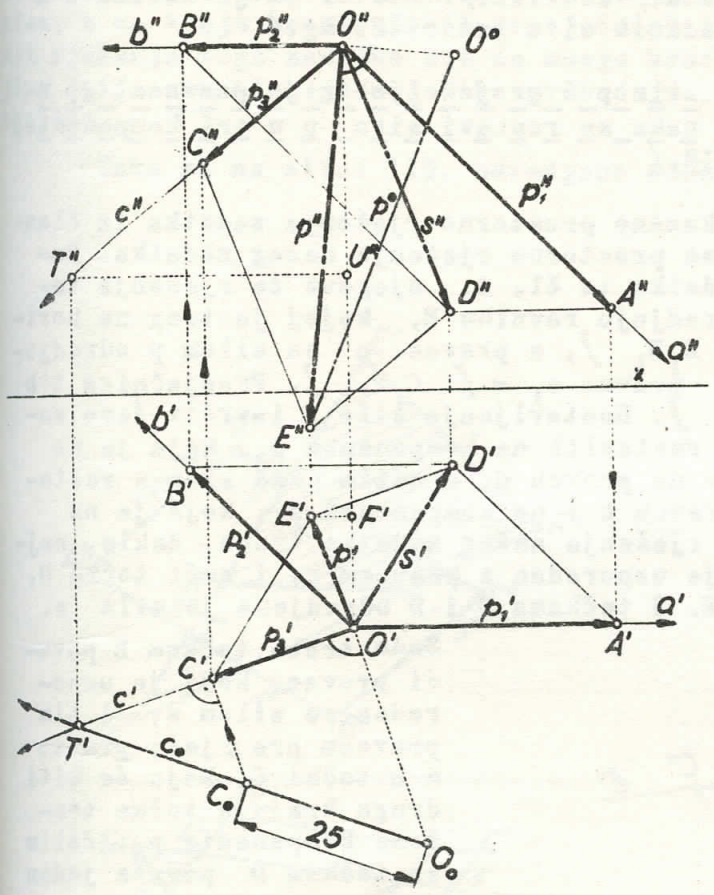
St. 37. Rezultanta triju sila i tri komponentne sile

A.-Zadane su projekcije triju zraka a, b i c sa zajedničkom početnom točkom O. U smjeru zrake a djeluje sila p_1 od 50 kg, u smjeru zrake b djeluje sila p_2 od 30 kg, a u smjeru zrake c djeluje sila p_3 od 25 kg; neka se odredi položaj, smjer i veličine rezultante tih sila! / sl.116./

Ako silu od 1 kg prikažemo dužinom od 1 mm, onda ćemo silu p_1 prikazati dužinom OA = 50 mm, silu p_2 dužinom OB=30 mm, a silu p_3 dužinom OC = 25 mm. Projekcije tih dužina odredimo ovako. Budući da je zraka a usporedna s Π_2 , mora dužina $O"A" = p_1"$ biti duga 50 mm, a ordinala povučena točkom A" siječe zraku a' u točki A', koja s točkom O' omedjuje dužinu $O'A' = p_1'$.

Zraka b je usporedna s Π_1 , pa zbog toga treba da dužina $O'B' = p_2'$ bude duga 30 mm , a ordinala povučena točkom B' siječe zraku b" u točki B", koja s točkom O" omedjuje dužinu O"B" = $p_2"$. Projekcije dužine OC = 25 mm odredimo kao na sl. 39. Istaknemo na zraci c koju god točku T / T'T" / i nadjemo pravu veličinu O_0T' dužine OT. Označimo zatim na zraci $c_0 \equiv (\ O_0\ T'\ )$ točku C_0, koja je od točke O_0 udaljena 25 mm. Pomoću točke C_0 odredimo na kraju projekcije C' i C" točke C, pa je $O'C' = p_3'$, a $O"C" = p_3"$.

Rezultantu zadanih sila p_1, p_2 i p_3 nadjemo tako / sl.117./, da najprije u ravnini E, koja je odredjena zrakama a i b, nadjemo pomoću parale-

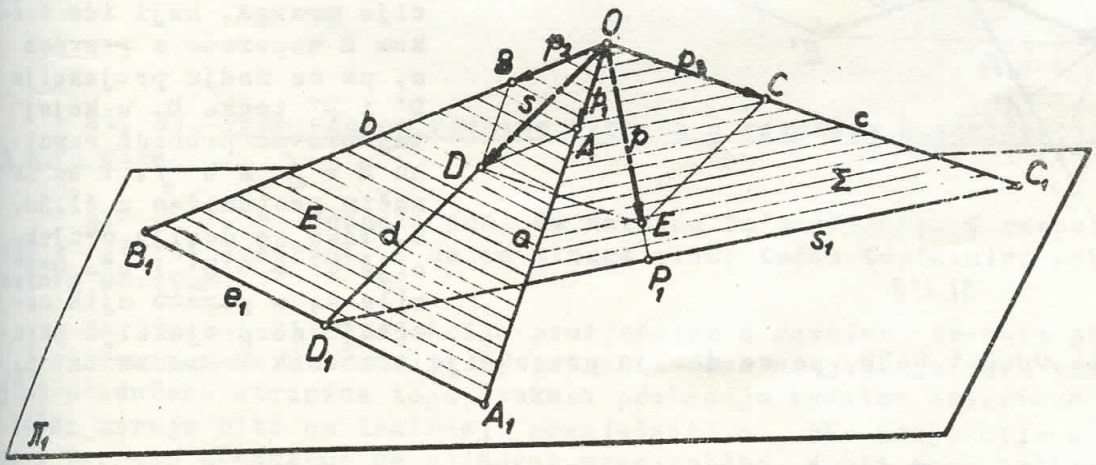


Sl. 116.

logrâma sila AOBD rezultantu s silâ p_1 i p_2; a zatim nadjemo u ravnini Σ, koja je odredjena silom s i zrakom c rezultantu p sila ŝ i p_3, pomoću paralelograma sila CODE.

Sila p, koju nadjemo na taj način, jest rezultanta zadanih sila P_1, P_2 i P_3.

Zrake a i b /sl.116./ odredjuju ravninu E= [a b] . Ako u toj ravnini nacrtamo paralelogram sila AOBD, kojemu su projekcije A'O'B'D' i A"O"B"D", onda je njegova dijagonala OD, kojoj su projekcije O'D' i O" D", grafički prikaz rezultante s sila p_1 i p_2. Sada sila s sa zrakom c odredjuje ravninu Σ = [s c] , u kojoj pomoću paralelograma sila CODE, kojemu su projekcije C'O' D'E' i C"O"D"E", nadjemo rezultantu p sila s i p_3. Dijagonala OE toga paralelograma, kojoj su



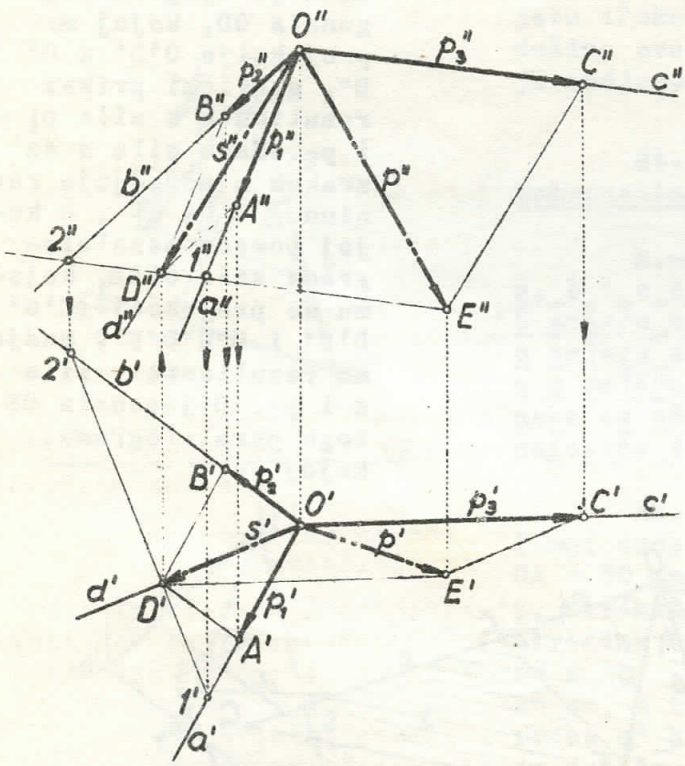
Sl. 117.

projekcije O'E' i O" E", bit će grafički prikaz tražene rezultante p. Položaj i smjer te rezultante odredjen je sada projekcijama p' i p" zrake p = OE, a njezinu veličinu nadjemo tako, da odredimo pravu veličinu O^0E^0

dužine OE pomoću diferencionog trokuta / čl.17.B./. Budući da je dužina $0^0E''$ duga 53 mm, veličina rezultante p zadanih sila iznosi 53 kg.

B.- Zadane su projekcije sile p i projekcije triju pravaca a, b i c, koji idu hvatištem O sile p; neka se rastavi sila p u tri komponente, koje su na zadanim pravcima. / sl.118./

Slika 117., kojom je prikazano prostorno rješenje zadatka iz članka A., može nam poslužiti, da nadjemo prostorno rješenje našeg zadatka. Budući da je naš zadatak baš obrat zadatka iz čl. A, njegovo će rješenje teći u obrnutom redu. Pravac a i b odredjuju ravninu E, kojoj je trag na horizontalnoj ravnini π_1 pravac $e_1 = [\ A_1B_1\ ]$, a pravac c sa silom p odredjuje ravninu Σ, kojoj je trag na π_1 pravac $s_1 = [\ C_1P_1\ ]$. Presječnica tih dviju ravnina je pravac $d = [\ D_1\ 0\ ]$. Rastavljanje sile p izvršit ćemo sada ovim redom: Najprije ćemo silu p rastaviti na komponentu p_3, koja je na pravcu c, i na komponentu s, koja je na pravcu d, a zatim ćemo silu s rastaviti na komponentu p_2, koja je na pravcu b i na komponentu p_1, koja je na pravcu a. U smislu toga prostornog rješenja našeg zadatka treba, dakle, najprije točkom E povući pravac, koji je usporedan s pravcem c, i naći točku D, u kojoj taj pravac probada ravninu E. S točkama 0 i D odredjena je sila s.



Sl. 118

Sada treba točkom E povući pravac, koji je usporedan sa silom s, i tim pravcem presjeći pravac a u točki C, koja će biti druga krajnja točka tražene komponente p_3. Zatim se točkom D povuče jedan pravac usporedo s pravcem a, a drugi usporedo s pravcem b, da bi se dobio paralelogram sila OADB, i u njemu tražene komponente P_1 i P_2.

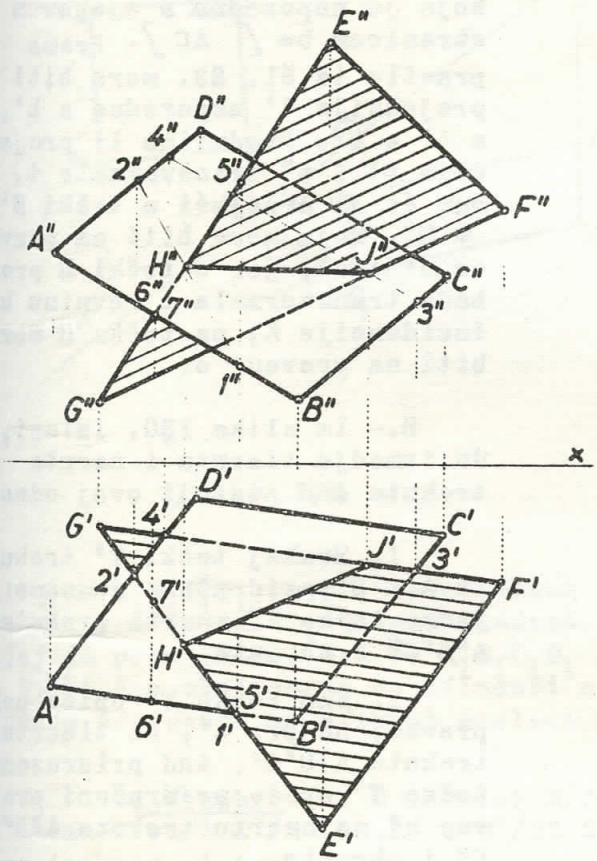
Na temelju toga razmatranja ovako se grafički riješi naš zadatak /sl. 118./. Nacrtaju se projekcije pravca, koji ide točkom E usporedo s pravcem c, pa se nadju projekcije D' i D'' točke D, u kojoj taj pravac probada ravninu $E = [\ a\ b\ ]$, i to na način protumačen u čl.36. C. Tako se dobiju projekcije $s' = 0'D'$ i $s'' = 0''D''$ sile s, a pomoću njih nacrtaju se projekcije paralelograma silâ ODEC i OADB, pa se dobiju projekcije traženih komponenata P_1, P_2 i P_3.

St. 38. Presječnica paralelograma i trokuta. Na sl.119. zadane su projekcije paralelograma ABCD i trokuta EFG, treba naći projekcije njihove presječnice. /sl.119./

Taj bismo zadatak mogli riješiti ovako: Odrediti tragove ravnine paralelograma pomoću probodišta jednog para njegovih usporednih stranica kao na sl.79., ili pomoću probodišta njegovih ukrštenih stranica kao na sl.78.,

zatim odrediti tragove ravnina trokuta pomoću probodišta dviju njegovih stranica, a na kraju konstruirati presječnicu tih dviju ravnina kao na sl.84. Ali rješenje toga zadatka bit će mnogo kraće, ako potražimo one točke, u kojima dvije stranice jednog lika probadaju ravninu drugog lika, pa te točke spojimo.

Tako su na slici 119. odredjene točke H i J, u kojima stranice FG i FG trokuta probadaju ravninu paralelograma. Projekcije H', H'', J' i J'' tih točaka nadjene su, kao na sl. 114., pomoću prvih projicirajućih ravnina, koje smo položili tim stranicama trokuta i pomoću presječnica 1-2 i 3-4 tih ravnina s paralelogramom ABCD.



Sl. 119.

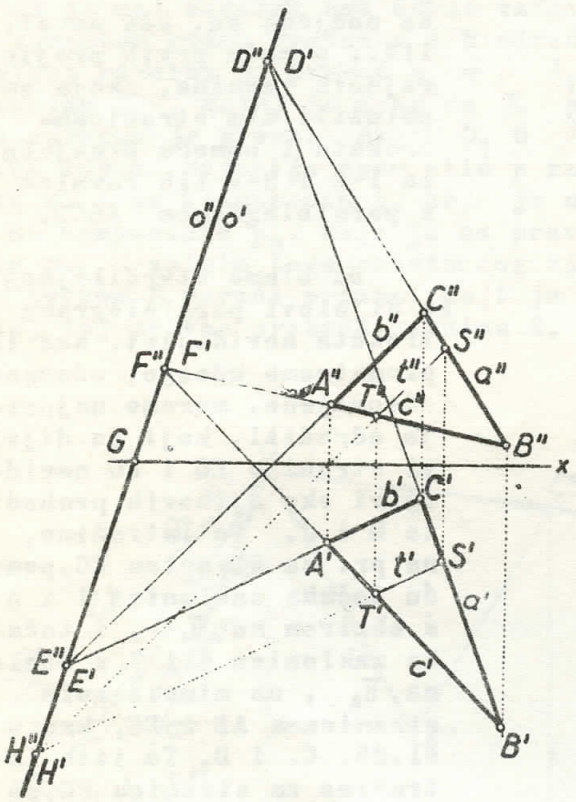
Da bismo utvrdili, koji su dijelovi paralelograma i trokuta nevidljivi, kad ih promatramo odozgo, odnosno odsprijeda, moramo najprije odrediti, koji su dijelovi stranica EG i FG nevidljivi oko njihovih probodišta H i J. To istražimo, na pr. za stranicu EG, pomoću točaka zaklonica 1 i 5 s obzirom na Π_1, i točaka zaklonica 6 i 7 s obzirom na Π_2, na mimoilaznim stranicama AB i EG, kao u čl.36. C. i D. To isto istražimo za stranicu FG, pa time dobijemo, koji je dio jednog lika zaklonjen drugim u tlocrtu, odnosno nacrtu.

St. 39. Presječnica ravnine trokuta s ravninom koincidencije. Afinitet u ravnini

A.- U čl. 8. doznali smo, da ravnina koincidencije K raspolavlja drugi i četvrti kvadrant, a da se tlocrt svake točke te ravnine poklapa s njezinim nacrtom.

Da bismo našli projekcije presječnice o ravnine trokuta ABC /sl. 120./ s ravninom koincidencije K, potražit ćemo projekcije onih točaka, u kojima produžene stranice toga trokuta probadaju ravninu koincidencije, jer te točke moraju biti na traženoj presječnici o. Ako projekcije a' i a'' stranice a trokuta produžimo do njihovog presjecišta, dobit ćemo točku, koju moramo označiti s D' i D'', jer je ta točka na a', kao i na a''. Budući da se projekcije D' i D'' točke D produžene stranice a poklapaju, točka D je u ravnini koincidencije K. Tako smo našli projekcije točke D, u kojoj produžena stranica a trokuta probada ravninu K. Na isti se način nađu projekcije točke E, odnosno F, u kojoj produžena stranica b, odnosno c, trokuta probada ravninu koincidencije K. Budući da ravnina trokuta siječe ravninu koinci-

cije u pravcu o, moraju točke D' ≡ D", E' ≡ E" i F' ≡ F" biti na pravcu, u kojemu se tlocrt o' i nacrt o" tražene presječnice o poklapaju. Taj pravac siječe os x u točki G, jer ravnina koincidencije prolazi osju x. Točke D i F toga pravca su u drugom kvadrantu, jer su im obje projekcije povrh osi x, dok je njegova točka E u četvrtom kvadrantu, jer su joj obje projekcije ispod osi x. Tražena presječnica o pruža se, prema tome, u drugom i četvrtom kvadrantu, a siječe os x u točki G.



Sl. 120.

Na slici 120. navrtane su još i projekcije t' i t" transverzale t= [ST] trokuta, koja je usporedna s njegovom stranicom b= [AC]. Prema pravilu iz čl. 23. mora biti projekcija t' usporedna s b', a t" s b". Produžimo li projekcije t' i t" transverzale t, one će se presjeći u točki H'≡ ≡ H", koja mora biti na pravcu o' ≡ o", jer u točki H probada transverzala t ravninu koincidencije K, pa točka H mora biti na pravcu o.

B.- Iz slike 120. izlazi, da izmedju tlocrta i nacrta trokuta ABC postoji ovaj odnos:

1. Svakoj točki T' trokuta A'B'C' pridružena je samo jedna točka T" nacrta trokuta A"B"C" i obrnuto.

2. Kad točka T' opiše neki pravac, na pr. a', na tlocrtu trokuta A'B'C', tad pridružena točka T" opiše pridruženi pravac a" na nacrtu trokuta A"B" C" i obrnuto.

3. Usporednim pravcima na tlocrtu trokuta A'B'C', na pr. b' i t', pridruženi su usporedni pravci b" i t" na nacrtu trokuta A"B"C" i obrnuto.

4. Spojnice pridruženih točaka tlocrta i nacrta trokuta, na pr. A'A", B'B" , C'C" ..., medju sobom su usporedne.

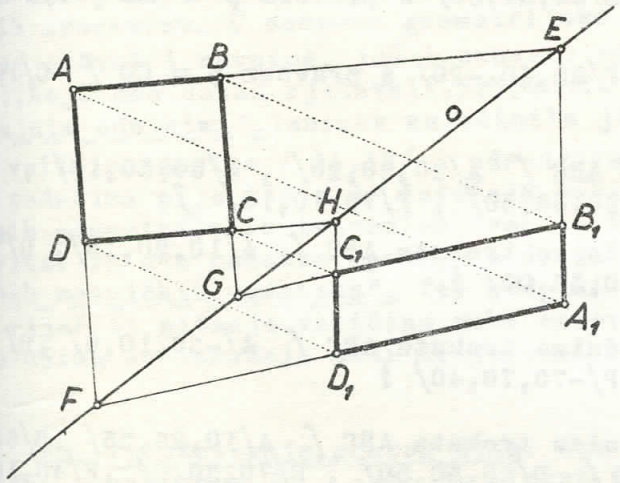
5. Sjecišta pridruženih pravaca tlocrta i nacrta trokuta, na pr. D'≡ ≡D" = (a'a"), E'≡ E" = (b'b"), F'≡ F" (c'c") i H'≡ H" = (t' t"), nalaze se na pravcu o'≡ o" .

6. Djelišni omjer triju točaka nekog pravca jednak je djelišnom omjeru pridruženih točaka na pridruženom pravcu ; na pr. A'T':B'T'= A"T": B"T" .

Kad dva ravna lika imaju sva ta svojstva, koja imaju tlocrt i nacrt trokuta, onda kažemo, da su ta dva lika perspektivno afina. Spojnice pridruženih točaka, koje su medju sobom usporedne ,zovu se zrake afinosti, a pravac, na kojemu su sjecišta pridruženih pravaca, zove se os afinosti .

Budući da se svaki ravan lik može rastaviti na konačan ili beskonačan broj trokuta, bit će tlocrt i nacrt svakog ravnog lika perspektivno afini likovi.

C. - Perspektivna afinost potpuno je odredjena, kad su zadani ovi elementi: os afinosti i par pridruženih točaka. Na primjer: Zadan je kvadrat ABCD, os afinosti o i točka A_1, koja je pridružena točki A; neka se konstruira lik $A_1B_1C_1D_1$, koji je perspektivno afin kvadratu ABCD. Točku B_1, koja je pridružena točki B nadjemo ovako: Produžimo stranicu AB kvadrata do sjecišta E s osi afinosti o. Pravcu [AE] pridružen je pravac [A_1E], jer je točka E pridružena samoj sebi. Ako sada točkom B povučemo zraku afinosti, t.j. usporednicu s zrakom [AA_1], ona će presjeći pravac [A_1E] u točki B_1. Na isti način, a pomoću pravca [AF] i njemu pridruženog pravca [A_1F], nadjemo točku D_1, koja je pridružena točki D. Točku C_1 možemo odrediti pomoću pravca [BG] i njemu pridruženog pravca [B_1G], ili pomoću pravca [DH] i njemu pridruženog pravca [D_1H]. Na oba načina dobijemo istu točku C_1. U smislu trećeg svojstva dvaju perspektivno afinih likova, kvadratu ABCD obično je perspektivno afin paralelogram $A_1B_1C_1D_1$, a pri specijalnom izboru točke A_1, može taj paralelogram postati pravokutnik, odnosno kvadrat. Ako se točka A_1 nalazi na kružnici, kojoj je promjer EF, bit će $A_1B_1C_1D_1$ pravokutnik, a kad je točka A_1 simetrična točki A s obzirom na os afinosti o, bit će $A_1B_1C_1D_1$ kvadrat, a u tom slučaju perspektivna afinost prelazi u aksijalnu simetriju.



Sl. 121.

40. Vježbe. - 1. U ravnini E/70,45,50/ nalazi se trokut ABC, kojemu je zadan tlocrt A'/20,20,z/ , B'/30,5,z/ , C'/50,10,z/; odredi nacrt $A''B''C''$ toga trokuta, i to:

a/ pomoću prbjekcija stranica a i c;
b/ pomoću projekcija sutražnica prvoga traga, koje idu vrhovima trokuta!

2. U ravnini E/-60,40,50/ nalazi se trokut ABC, kojemu je zadan nacrt A''/-10,y,10/ , B''/-25,y,25/, C''/-40,y,5/; odredi njegov tlocrt $A'B'C'$, i to:

a/ pomoću projekcija stranica a i c;
b/ pomoću sutražnica drugoga traga, koje idu vrhovima trokuta!

3. Zadan je prvi trag e_1 ravnine E/60,50, ∫ / i točka T /10,20,15/, koja je u ravnini E; nadji drugi trag te ravnine!

4. Nadji tragove ravnine, koja je zadana s tri točke A/40,10,30/ , B/20,40,10/ , C/ 50,20,10/ !

5. Zadana je ravnina E/-50,45,40/ i točka T/-40,20,25/; položi točkom T ravninu P usporednu s ravninom E!

6. Nacrtaj projekcije presječnice ovih dviju ravnina:

a/ A/-30,20,15/ i B/30,30,-40/ ,
b/ Γ/-30,40,20/ i Δ/20,-10,30/ ,
c/ E/-40,-30,20/ i F/20,40,-40/ .

d/ K/-50,40,45/ i Λ/ ∞,20,∞ / ,
e/ M/50,40,45 / i N/ ∞,∞,20 / ,
f/ Σ/60,30,50 / i T/60,50,30 / !

7. Točkom A/50,20,20/ povuci pravac, koji je usporedan s ravninama P/-20,15,30/ i Σ/40,50,20/! Uputa: Traženi pravac mora biti usporedan s presječnicom zadanih ravnina.

8. Odredi probodište ravnine E/50,50,30/ s pravcem p ≡ AB [A/10, 15,10/ , B/30,25,40/] !

9. Odredi probodište ravnine P/30,40,-20/ s pravcem p ≡ CD [C/10, 15,30/ , D/30,30,5/] !

St.10. Odredi probodište trokuta ABC [A/20,30,20/ , B/60,50,10/ , C/80,20,50/] s pravcem p ≡ EF [E/30,50,50/ , F/70,10,10/]!

11. Nacrtaj projekcije presječnice trokuta ABC [A/10,20,10/, B/70, 60,20/ , C/50,20,50/] s ravninom E/60,50,∞/ !

12. Nacrtaj projekcije presječnice trokuta ABC [A/-30,10,0/ ,B/ -10,30,0/ , C/-60,40,60/] s ravinom P/-70,70,40/ !

St. 13. Odredi projekcije presječnice trokuta ABC [A/10,25,25/ ,B/60, 50,10/ , C/90,15,65/] s trokutom DEF [D/20,50,60/ , E/70,30,0/ ,F/40,10, 0/] !

St. 14. Zadane su projekcije triju sila p_1 [0/50,30,60/ , A/70,45,35/], p_2 [0/50,30,60/ , B/15,40,30/] i p_3 [0/50,30,60/ , C/90,5,60/]; odredi položaj, smjer i veličinu rezultante tih sila, ako je sila od jedan kilogram prikazana dužinom od 1 mm!

St. 15. Nacrtaj projekcije sile p [0/55,20,55/ , P/45,55,15/] i projekcije triju pravaca a, b i c, koji prolaze hvatištem 0 sile p, ako je na pravcu a točka E/80,5,55/ , na pravcu b točka F/25,20,10/ , a na pravcu c točka G/90,55,20/ , zatim rastavi silu p u tri komponente, koje su na zadanim pravcima.

16. Zadan je kvadrat ABCD i os afinosti o, koja ne siječe kvadrat; nacrtaj perspektivno afini četverokut $A_1B_1C_1D_1$, ako A_1 odabereš tako, da su pridružene točke A i A_1 :

a/ na istoj strani osi o,
b/ na različitim stranama osi o!

17. Zadan je istostraničnI trokut ABC i os afinosti o, koja siječe trokut; nacrtaj perspektivno afini trokut $A_1B_1C_1$, ako A_1 odabereš tako, da su pridružene točke A i A_1 :

a/ na istoj strani osi o,
b/ na različitim stranama osi o!

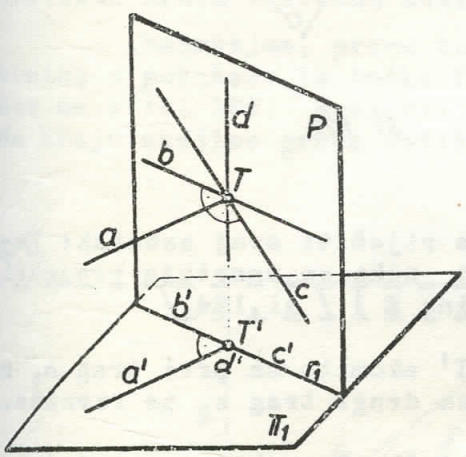
18. Zadana je os afinosti o i dvije perspektivno afine točke A i A_1; odredi takav par medju sobom okomitih pravaca a i b, koji idu točkom A, da je njemu pridruženi par pravaca a_1 i b_1 takodjer medju sobom okomit, ako su pridružene točke A i A_1 :

a/ na istoj strani osi o,
b/ na različitim stranama osi o!

§ 8. OSNOVNI METRIČKI ZADACI

41. Podjela osnovnih geometrijskih zadataka. Sve osnovne geometrijske zadatke možemo svrstati u dvije skupine. U prvu skupinu spadaju oni zadaci, kojima treba riješiti neki medjusobni položajni odnos dviju osnovnih geometrijskih tvorevina. U osnovne geometrijske tvorevine ubrajat ćemo pored točke dužine, pravca i ravnine, još i osnovne ravne geometrijske likove. Skoro svi zadaci, koje smo dosad rješavali, pripadali su toj "skupini osnovnih zadataka o položajnim odnosima". Iznimku su učinila jedino ova dva zadatka: odredjivanje prave veličine dužine / čl.17/ i odredjivanje priklonih kutova pravca /čl.20/. U tim zadacima nije došao do izražaja neki medjusobni položajni odnos dviju osnovnih geometrijskih tvorevina, već je bila u pitanju veličina jedne od tih tvorevina. Ta dva zadatka spadaju u drugu skupinu zadataka, t.j. u "skupinu osnovnih metričkih zadataka". Toj skupini pripadaju svi oni zadaci, u kojima treba riješiti pitanje veličine neke osnovne geometrijske tvorevine, ili dolazi u njima do izražaja neki medjusobni metrički odnos dviju od tih tvorevina.

42. Projiciranje pravog kuta. Ako su kraci a i b pravog kuta /sl.122/ usporedni s ravninom Π_1, onda će tlocrt toga pravog kuta biti opet pravi kut, jer se paralelnim pomicanjem toga pravog kuta $\sphericalangle ab$ [1] u smjeru normalnog projiciranja na Π_1 može točno poklopiti njegov tlocrt $\sphericalangle a'b'$. Rotira li se krak b oko kraka a, on će opisati ravninu P, koja je okomita na kraku a i na ravnini Π_1. Prvi trag r_1 te ravnine poklapa se s pravcem b'.



Sl. 122.

Ako je pravac c jedan od rotiranih položaja kraka b, to će njegov tlocrt c' pasti u $r_1 \equiv b'$ /čl.29.A/, pa će prema tome i normalna projekcija pravog kuta $\sphericalangle ac$, kojemu je samo krak a usporedan s Π_1 biti opet pravi kut. Samo kad krak b zauzme položaj pravca d, koji je okomit na ravnini Π_1, bit će normalna projekcija pravoga kuta $\sphericalangle ad$ na pravcu a', jer je normalna projekcija pravca d točka $d' \equiv T'$. Iz toga izvodimo ovo pravilo:

Normalna projekcija pravoga kuta na nekoj ravnini bit će pravi kut, ako je jedan njegov krak usporedan s tom ravninom, a drugi nije okomit na toj ravnini.

43. Okomitost pravca i ravnine. /Sl.123./

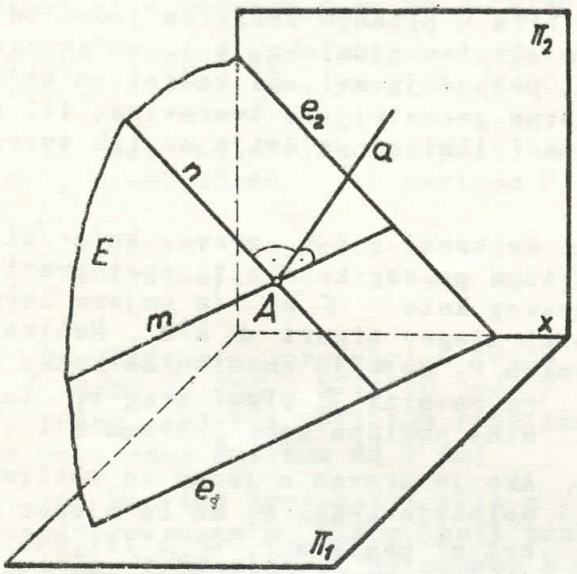
A.-Ako je pravac a okomit na ravnini E, on je, prema jednom stereometrijskom pravilu, okomit na svakom pravcu te ravnine. On će, dakle, biti okomit na sutražnici m prvoga traga, kao i na sutražnici s drugoga traga ravnine E, koje idu probodištem A te ravnine s pravcem a. Budući da je pravac m usporedan s ravninom Π_1, to će se pravi kut, što ga čini pravac a i sutražnica m,

---

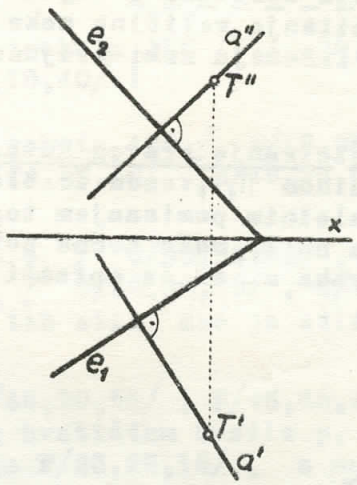
[1] Kut, kojemu su kraci a i b, ili kut, što ga čine pravci a i b, označuje se znakom $\sphericalangle ab$.

projicirati na π_1 kao pravi kut prema pravilu iz čl. 42., bit će dakle $\sphericalangle$ $a'm'$ pravi kut. Kako je pravac m' usporedan s prvim tragom e_1 ravnine E, bit će i $\sphericalangle$ $a'e_1$ pravi kut. Budući da je pravac n usporedan s ravninom π_2, mora po pravilu iz čl. 42. $\sphericalangle$ $a''n''$ biti pravi kut, a kako je pravac n'' usporedan s drugim tragom e_2 ravnine E, bit će i $\sphericalangle$ $a''e_2$ pravi kut. Iz toga slijedi:

Kad je pravac okomit na nekoj ravnini, njegova je prva projekcija okomita na prvom tragu, a druga projekcija okomita na drugom tragu te ravnine.



Sl. 123.



Sl. 124.

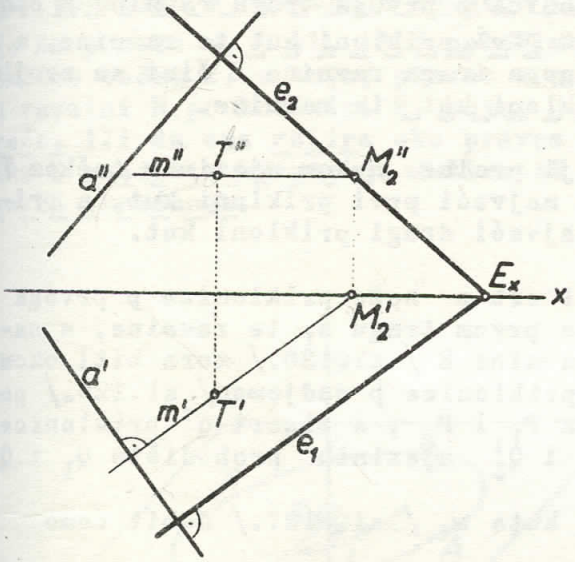
B.- Pomoću zadnjeg pravila lako ćemo riješiti ovaj zadatak: Zadani su tragovi ravnine E i projekcije točke T; neka se nacrtaju projekcije pravca a, koji ide točkom T okomito na ravninu E / sl.124./

Tlocrt a' pravca a mora ići točkom T' okomito na prvi trag e_1 ravnine E, a nacrt a'' mora ići točkom T'' okomito na drugi trag e_2 te ravnine.

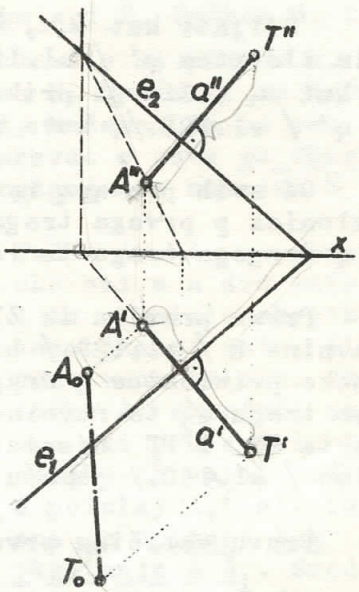
C.- Zadane su projekcije pravca a i točke T; neka se nacrtaju tragovi ravnine E, koja prolazi točkom T, a okomita je na pravcu a! /sl.125./

Prema gornjem pravilu mora biti prvi trag e_1 ravnine E okomit na pravcu a', a drugi trag e_2 okomit na pravcu a''. Budući da su nam time poznati smjerovi tragova ravnine E, možemo nacrtati projekcije jedne sutražnice prvoga, ili drugoga traga te ravnine, koja ide točkom T. Tlocrt m' sutražnice m prvoga traga ravnine E, koju zamislimo točkom T, mora ići točkom T' okomito na a' , a njezin nacrt m'' mora ići točkom T'' usporedo s osi x. Ako sada pomoću m' i m'' nadjemo drugo probodište $M_2 \equiv M_2''$ te sutražnice m, onda imamo jednu točku drugoga traga e_2 tražene ravnine E.

Točkom M_2'' ide drugi trag e_2 okomito na a'' do točke E_x, koja je na osi x, a iz E_x ide prvi trag e_1 te ravnine okomito na a' .



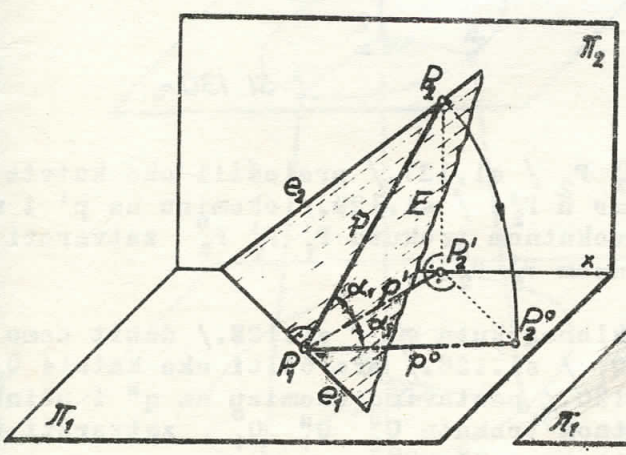
Sl. 125.



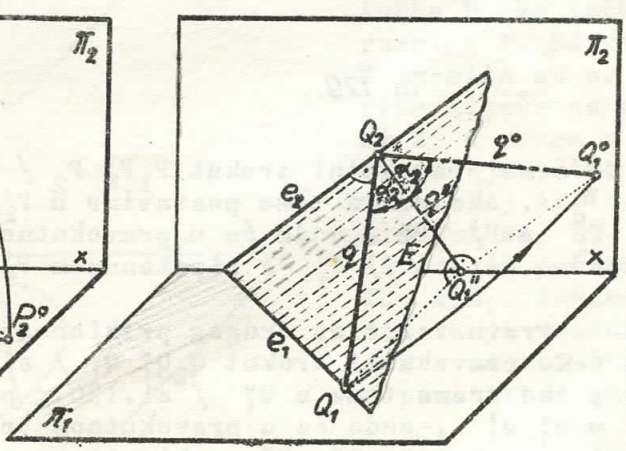
Sl. 126.

44. Udaljenost točke od ravnine. Da bi se odredila udaljenost točke T od ravnine E, treba najprije iz točke T postaviti okomicu na tu ravninu, zatim naći točku A, u kojoj ta okomica probada ravninu E, a na kraju odrediti pravu veličinu dužine TA.

Nacrtajmo, prema tome, na sl. 126. najprije projekcije a' i a'' okomice a povučene iz točke T na ravninu E kao na slici 124. Odredimo zatim kao na slici 106. projekcije A' i A'' prodorišta A ravnine E s pravcem a. Na kraju nadjimo pravu veličinu T_oA_o dužine TA kao na slici 25.



Sl. 127.



Sl. 128.

45. Priklonice i prikloni kutovi ravnine. Svaki pravac ravnine E, koji je okomit na njezinom prvom tragu, zove se priklonica prvoga traga te

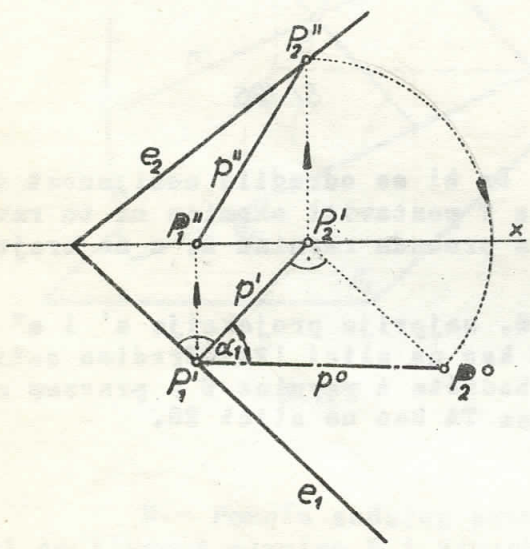
ravnine, a svaki pravac te ravnine, koji je okomit na njezinom drugom tragu, zove se priklonica drugoga traga te ravnine. Slikom 127. prikazana je jedna priklonica p prvoga traga ravnine E i njezin tlocrt p', a slikom 128. prikazana je jedna priklonica q drugoga traga ravnine E i njezin nacrt q".

Šiljati kut α_1 , što ga priklonica p prvoga traga ravnine E čini sa svojim tlocrtom p' / sl.127./, zove se prvi prikloni kut te ravnine, a šiljati kut α_2 , što ga priklonica q drugoga traga ravnine E čini sa svojim nacrtom q" / sl.128./, zove se drugi prikloni kut te ravnine.

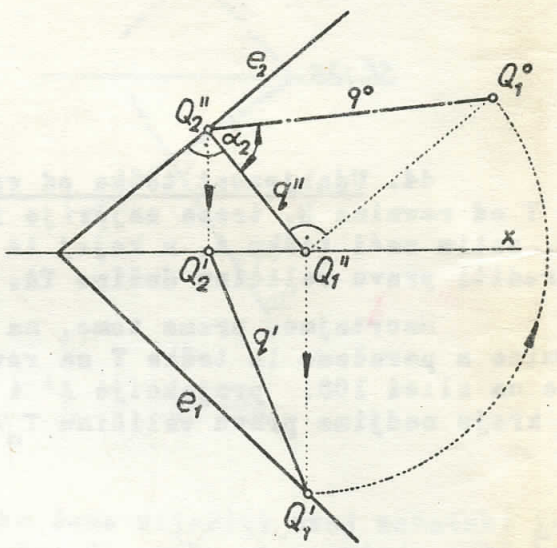
Od svih pravaca ravnine E, koji prolaze nekom njezinom točkom T, ima priklonica p prvoga traga te ravnine najveći prvi prikloni kut, a priklonica q drugoga traga te ravnine ima najveći drugi prikloni kut.

Prema pravilu iz čl.42. mora tlocrt p neke priklonice p prvoga traga ravnine E / sl.129./ biti okomit na prvom tragu e_1 te ravnine, a nacrt q" neke priklonice q drugoga traga ravnine E / sl.130./ mora biti okomit na drugom tragu e_2 te ravnine. Nacrt p" priklonice p nadjemo / sl.129./ pomoću nacrta P_1'' i P_2'' njezinih probodišta P_1 i P_2 , a tlocrt q' priklonice q odredimo / sl.130./ pomoću tlocrta Q_1' i Q_2' njezinih probodišta Q_1 i Q_2.

Pravu veličinu prvog priklonog kuta α_1 / sl. 127./ dobit ćemo



Sl. 129.



Sl. 130.

tako, da ćemo pravokutni trokut $P_1P_2'P_2$ / sl.127./ preložiti oko katete P_1P_2' na Π_1 . Ako prema tome postavimo u P_2' / sl.129./ okomicu na p' i učinimo $P_2'P_2^0 = P_2'P_2''$, onda će u pravokutnom trokutu $P_1'P_2'P_2^0$ zatvarati traženi kut α_1 kateta $P_2'P_1'$ s hipotenuzom $P_1'P_2^0$.

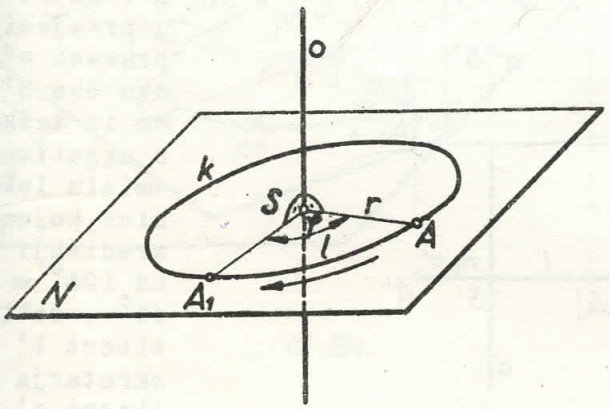
Pravu veličinu drugog priklonog kuta α_2 / sl.128./ dobit cemo tako, da ćemo pravokutni trokut $Q_2Q_1''Q_1$ / sl.128./ preložiti oko katete Q_2Q_1'' na Π_2 . Ako prema tome u Q_1'' / sl.130./ postavimo okomicu na q" i učinimo $Q_1''Q_1^0 = Q_1''Q_1'$, onda će u pravokutnom trokutu $Q_2''Q_1''Q_1^0$ zatvarati traženi kut α_2 kateta $Q_1''Q_2''$ s hipotenuzom $Q_2''Q_1^0$.

St. 46. Okretanje ili rotacija točke oko pravca

A.- Dosad smo već upotrebili okretanje nekog ravnog lika oko pravca, na pr. kod odredjivanja prave veličine dužine / čl.17. i 18./ , za-

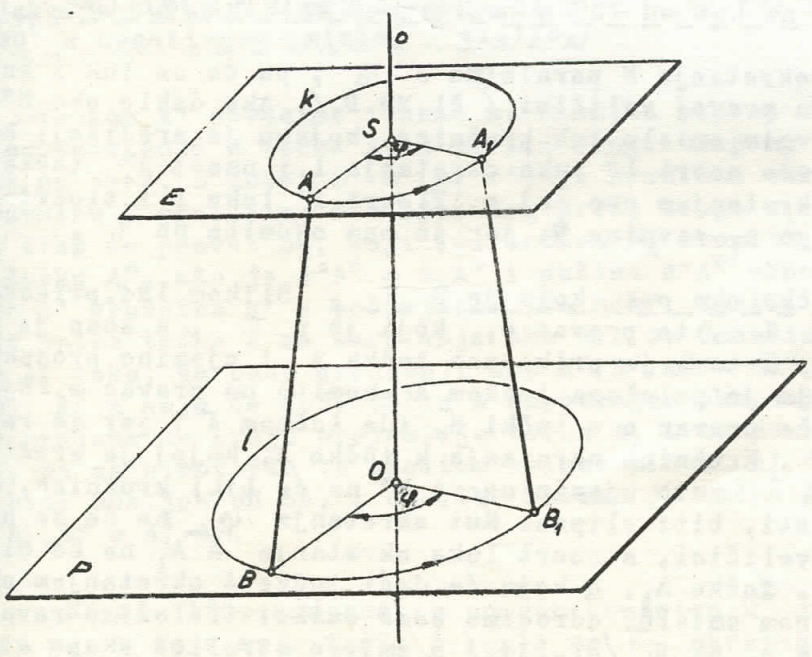
tim prave veličine priklonih kutova pravca (čl. 29) i priklonih kutova ravnine (čl. 45), ali smo to okretanje vršili samo za kut od 90^0 i nazivali smo ga prelaganje na Π_1 , ili na Π_2 . Sada ćemo vršiti okretanje točke i dužine oko nekog pravca za koji god kut φ .

B.- Općenito o okretanju točke A i dužine AB oko osi O. Točkom A, koja nije na pravcu o, (sl. 131) položimo ravninu N okomito na pravac o, i označimo točku S, u kojoj pravac o probada ravninu N. Kreće li se točka A u ravnini N po kružnici k, kojoj je polumjer SA, kažemo, da se ona okreće, ili da ona rotira oko pravca o. Tada se pravac o zove os okretanja, točka S središte okretanja, dužina AS polumjer okretanja, a ravnina N ravnina okretanja.



Sl. 131.

Točka A može se okretati oko osi o u dva smisla, i to u smislu okretanja kazaljke na satu, ili u protivnom smislu. Ako je točka A, okrećući se oko osi o u smislu kazaljke na satu, došla u položaj A_1 (sl. 131.), ona je opisala luk okretanja $\overset{\frown}{A A_1}$. Središnji kut φ , koji pripada tome luku, zove se kut okretanja te točke. Da bi se okretanje neke točke moglo izvesti, moraju, prema tome, pored te točke biti zadani još i ovi elementi: os okretanja, kut i smjer okretanja. U geometriji kažemo, da je okretanje u smislu kazaljke na satu negativno, a u protivnom smislu ono je pozitivno. Okretanje točke A na sl. 131. izvršeno je, prema tome, u negativnom smislu.

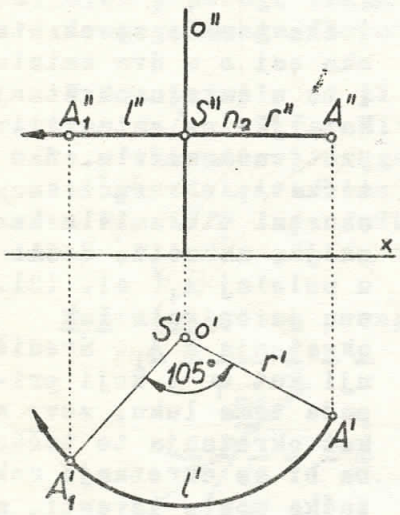


Sl. 131.a

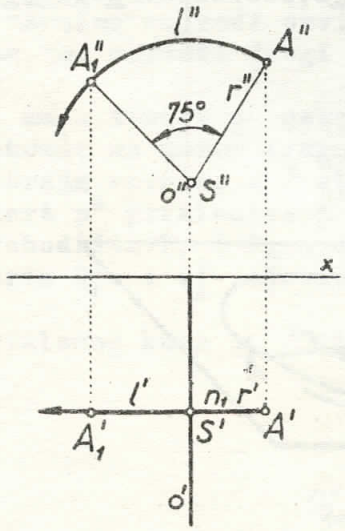
Na sl. 131.a prikazano je okretanje dužine AB oko osi o za kut φ . Točka A okreće se oko točke S u ravnini E, a točka B oko točke O u ravnine P. Ravnine E i P okomito su na osi o. Prva siječe os o u točki S, a druga u točki O. Ako je točka A došla u položaj A_1, a točka B u položaj B_1, onda je dužina AB došla u položaj A_1B_1. Dužina AB izvršila je rotaciju oko osi o za kut φ, i to u pozitivnom smislu.

C.- Zadane su projekcije točke A i osi o_1 koja je okomita na π_1 , a okreni točku A oko osi o za kut od 105^0 u negativnom smislu !

Budući da je os okretanja okomita na π_1 , bit će ravnina okretanja N usporedna s π_1 . Njezin drugi trag n_2 /sl.132./ ide točkom A" usporedo s osi x, a luk i kut okretanja projicirat će se na π_1 u pravoj veličini /čl.29. C./. Tlocrt S' središta okretanja S poklapa se s o', a njegov nacrt S" je u presjecištu pravaca o" i n_2. Ako oko S' opišemo iz točke A' u negativnom smislu luk kružnice, kojemu je središnji kut od $105^0 = 60^0 + 45^0$, dobijemo tlocrt l' luka okretanja l i tlocrt A_1' točke A_1, u koju je došla točka A okretanjem oko osi o. Nacrt l" luka l i nacrt A_1'' točke A_1 bit će u drugom tragu n_2 ravnine N, jer je ona okomita na π_2 .



Sl. 132.

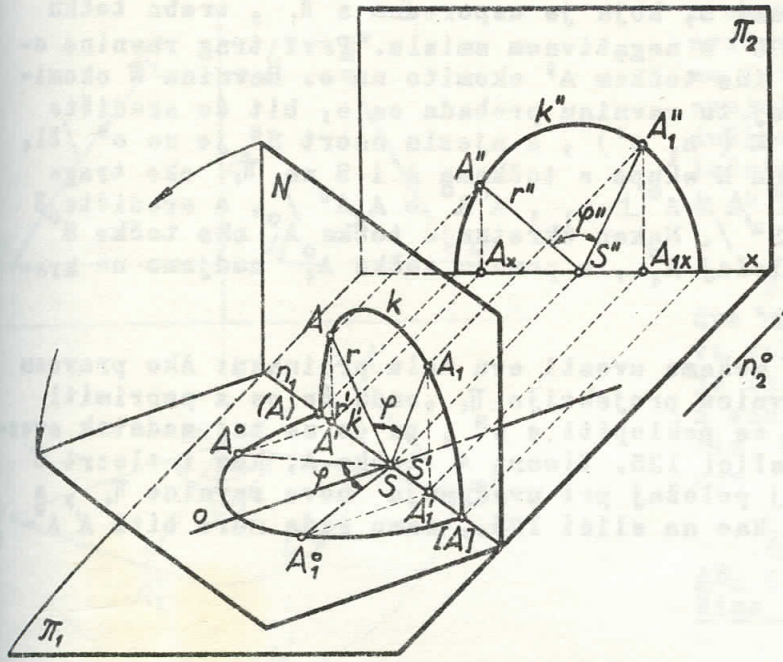


Sl. 133.

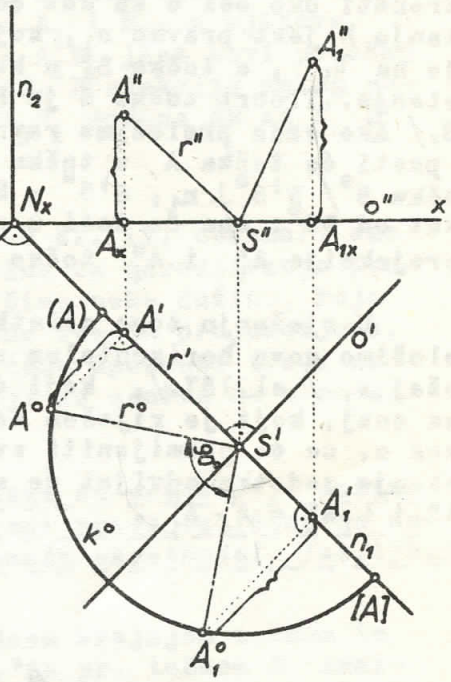
D.- Zadane su projekcije točke A i osi o_1 koja je okomita na π_2, okreni točku A oko osi o za kut od 75^0 u pozitivnom smislu! /Sl.133./

Sada je ravnina okretanja N paralelna s π_2 , pa će se luk i kut okretanja projicirati na π_2 u pravoj veličini / čl.29.D./. Ako dakle oko S" opišemo iz točke A" u pozitivnim smislu luk kružnice, kojemu je središnji kut od $75^0 = 45^0 + 30^0$, dobijemo nacrt l" luka okretanja l i nacrt A_1'' točke A_1, u koju je došla točka A okretanjem oko osi o. Tlocrt l' luka l i tlocrt A_1' točke A_1 bit će u prvom tragu n_1 ravnine N, jer je ona okomita na π_1 .

E.- Okretanje točke oko osi, koja je u π_1 . Slikom 134. prikazane su ravnine projekcija π_1 i π_2 , te pravac o, koji je u π_1 , a koso je položen prema ravnini π_2 . K tome je prikazana točka A i njezine projekcije A' i A" , te ravnina N, koja je položena točkom A okomito na pravac o. Njezin prvi trag n_1, koji siječe pravac o u točki S, ide točkom A' , jer je ravnina N okomita na ravninu π_1 . Kružnica okretanja k točke A, kojoj je središte S, sada nije usporedna s π_2 , zato njezin nacrt k" ne će biti kružnica, već će, kako ćemo kasnije dokazati, biti elipsa. Kut okretanja φ ne će se projicirati na π_2 u pravoj veličini, a nacrt luka okretanja $\overset{\frown}{A A_1}$ ne će biti luk kružnice već luk elipse. Točku A_1, u koju će doći točka A okretanjem oko osi o za kut φ u negativnom smislu, odredimo sada ovako: Preložimo ravninu N oko njezinog prvog traga n_1 na π_1 /sl.134./ u smjeru strelice skupa s točkom A. Preloženu točku A^0 okrenemo zatim u π_1 oko točke S za kut φ i dobijemo točku A_1^0 . Na kraju dovedemo ravninu N skupa s točkom A_1 okretanjem oko n_1 u prvotni položaj, pa dobijemo točku A_1 u presteru.



Sl. 134.



Sl. 135.

Slikom 134. prikazan je još i način, kako se točka A okretanjem oko osi o može dovesti u ravninu π_1 . Ako kružnicom okretanja k presiječemo prvi trag n_1 ravnine N, dobijemo točke (A) i [A]. Okrenemo li točku A oko osi o u pozitivnom smislu, ona će pasti u točku (A), a okrenemo li je u negativnom smislu, ona će pasti u točku [A].

Nakon tih razmatranja možemo sada riješiti ovaj zadatak: Zadane su projekcije točke A i osi o, koja je u π_1 ; okreni točku A oko osi o za kut od 90° u negativnom smislu! (sl. 135.)

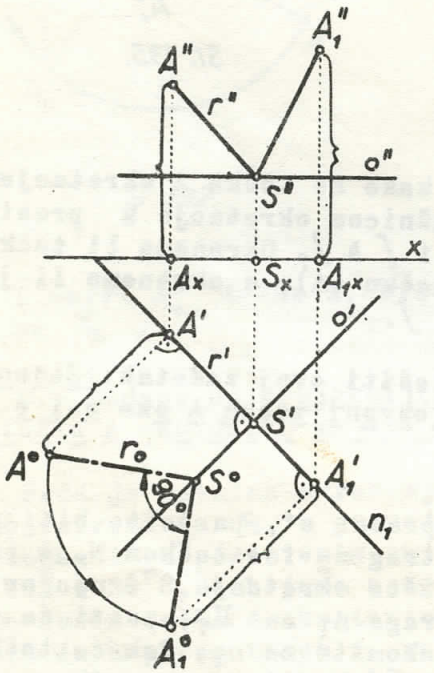
Točkom A' povucimo pravac n_1 okomito pravac o', pa će to biti prvi trag ravnine okretanja N točke A, a njezin drugi trag n_2 ide točkom $N_x = (n_1\ x)$ okomito na os x. U točki S' = (n_1 o') je središte okretanja S i njegov tlocrt. Ako ravninu N preložimo oko njezinog prvog traga n_1 na π_1, pasti će njezin drugi trag na pravac n_2, koji ide točkom N_x okomito na n_1, dok će točka A pasti u točku A^0, ako je $A'A^0 = A_xA''$ i dužina $A'A^0$ okomita na n_1. Ako sada opišemo oko S' kružnicu k^0 s polumjerom $r^0 = S'A^0$, dobili smo preložaj one kružnice, što je opiše točka A za okretanja oko osi o. Označimo li zatim na kružnici k^0 točku A_1^0 tako, da bude središnji kut $A^0\ S'\ A_1^0 = 90^0$, dobili smo u preložaju onu točku A_1^0 u koju će doći točka A okretanjem oko osi za kut od 90°. Pomoću te točke nadjemo na kraju projekcije točke A, i to ovako: Spustimo iz A_1 okomicu na n_1, pa se u nožištu te okomice nalazi tlocrt A_1' točke A_1, u njezin nacrt A_1'' mora biti udaljen od osi x onoliko koliko je točka A_1^0 udaljena od traga n_1, t.j. $A_{1x}A_1'' = A_1'\ A_1^0$.

Na sl. 135. nadjene su pomoću kružnice k^0 još i točke (A) i [A] na pravcu n_1, u koje može točka A pasti na π_1 okretanjem oko osi o.

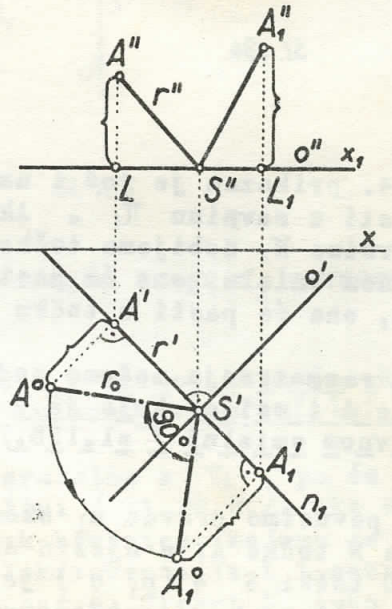
Drugi trag n_2 ravnine okretanja N, kao i njegov preložaj n_2^0 na π_1 , niemo pri rješavanju gornjeg zadatka upotrebili, pa ih ubuduće na slikama 136. i 137. možemo izpustiti.

F.- Okretanje točke oko osi, koja je usporedna s Π_1 -
Zadane su projekcije točke A i osi o, koja je usporedna s Π_1 , treba točku A okrenuti oko osi o za kut od 90^0 u negativnom smislu. Prvi trag ravnine okretanja N jest pravac n_1, koji ide točkom A^0 okomito na o. Ravnina N okomita je na Π_1 , a točka S, u kojoj tu ravninu probada os o, bit će središte okretanja. Tlocrt točke S je $S' \equiv (n_1\ o')$, a njezin nacrt S'' je na o'' /čl. 36.B./ Ako sada preložimo ravninu N skupa s točkama A i S na Π_1 oko traga n_1, pasti će točka A u točku A^0 / $A'A^0 \perp n_1$, $A'A^0 = A_xA''$ /, a središte S^0 u točku S^0/ $S'S^0 \perp n_1$, $S'S^0 = S_xS''$ /. Nakon okretanja točke A^0 oko točke S^0 za kut od 90^0, ona će doći u položaj A_1^0 , a pomoću točke A_1^0 nadjemo na kraju projekcije A_1' i A_1'' točke A_1.

U rješenju toga zadatka možemo uvesti ovu malu preinaku: Ako pravcem o položimo novu horizontalnu ravninu projekcija Π_1 ,onda će os x poprimiti položaj x_1 / sl.137./, koji će se poklopiti s o'' , pa će se taj zadatak svesti na onaj, koji je riješen na slici 135. Tlocrt A' točke A, kao i tlocrt o' pravca o, ne će promijeniti svoj položaj pri uvadjanju nove ravnine Π_1 , a rješenje zadatka odvijat će se kao na slici 135., samo sada mora biti $A'A^0 = LA''$ i $L_1A_1'' = A_1'A_1^0$.



Sl. 136.

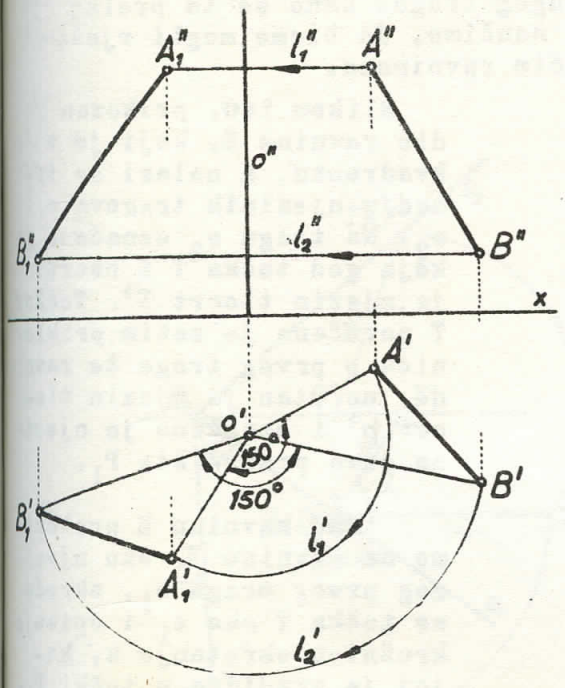


Sl. 137.

St. 47. Okretanje ili rotacija dužine oko pravca

A.- Ako neku dužinu treba okrenuti oko pravca o za kut φ u odredjenom smislu, onda ćemo taj zadatak riješiti tako, da ćemo izvršiti okretanje krajnjih točaka te dužine, zatim ćemo nove položaje tih točaka medju sobom spojiti, i tako ćemo dobiti zaokrenuti položaj zadane dužine (sl. 131.a).

Zadane su projekcije dužine AB i osi o, koja je okomita na Π_1 , okreni tu dužinu oko osi o za kut od 150^0 u negativnom smislu!



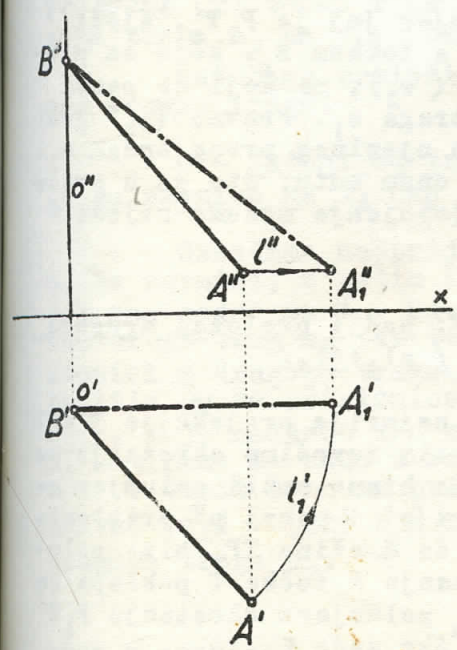
Sl. 138.

Ako okrenemo točku A, a zatim točku B / sl.138./ , oko osi o za kut od $150^0 = 90^0 + 60^0$ u negativnom smislu, na način prikazan slikom 132. , dobijemo točke A_1 i B_1, a njihova spojnica A_1B_1 jest novi položaj dužine AB. Projekcije novog položaja A_1B_1 dužine AB su A'_1 B'_1 i A''_1 B''_1 .

B.- U čl. 17. upoznali smo dva načina za odredjivanje prave veličine neke dužine, koja je zadana svojim projekcijama, a sada ćemo upoznati treći način, koji se osniva na okretanju.

Zadane su projekcije dužine AB_1 odredi pravu veličinu te dužine pomoću okretanja! /sl. 139./

Jednom krajnjom točkom te dužine, na pr. točkom B, zamislimo pravac o, koji je okomit na ravnini Π_1 . Ako sada dužinu AB okrenemo oko pravca o za toliko, da ona postane usporedna s ravninom Π_2 , onda će se ona na Π_2 projicirati u pravoj veličini. Točka B, koja je na pravcu o, ostat će za okretanja na istom mjestu, dok će se točka A okretati po kružnici, koja je usporedna s Π_1 , a kojoj je polumjer jednak dužini $A'B'$. Budući da dužina AB treba da okretanjem oko pravca o postane usporedna s Π_2 , mora tlocrt A'_1B' njezinog novog položaja A_1B biti usporedan s osi x. Tlocrt luka l, što ga točka A ima da opiše, jest luk $A'A'_1$, a njegov nacrt je dužina $A''A''_1$, koja je usporedna s osi x. Dužina A''_1B'' jest nacrt novog položaja dužine AB i ujedno njezina prava veličina.



Sl. 139.

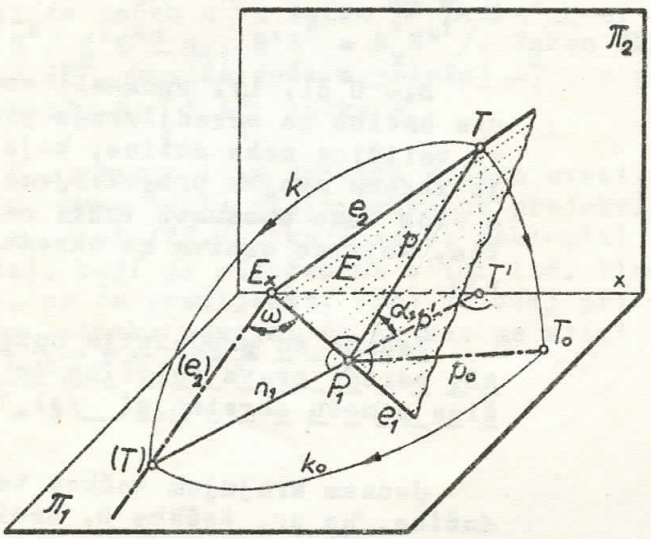
Pravu veličinu dužine AB možemo odrediti i tako, da jednom krajnjom točkom, na pr. opet točkom B, namislimo pravac o, koji je okomit na ravnini Π_2 , a zatim da tu dužinu okrenemo oko pravca o za toliko, da ona postane usporedna s ravninom Π_1 , pa će se tada ona projicirati na Π_1 u pravoj veličini.

Izvedi konstrukciju prave veličine dužine AB na taj način!

48. Prelaganje ravnine

A.- Kad neku ravninu položimo na ravninu Π_1 okretanjem oko njezinog

prvog traga, kažemo, da smo tu ravninu preložili na Π_1 oko njezinog prvog tr... ga, a kad je položimo na ravninu Π_2 okretanjem oko njezinog drugog traga, k... žemo, da smo preložili na Π_2 oko njezinog drugog traga. Kako se to prelaga... vrši, kad su zadani tragovi ravnine, treba da naučimo, da bismo mogli rješa... vati metričke zadatke u projicirajućim i u općim ravninama.



Sl. 140.

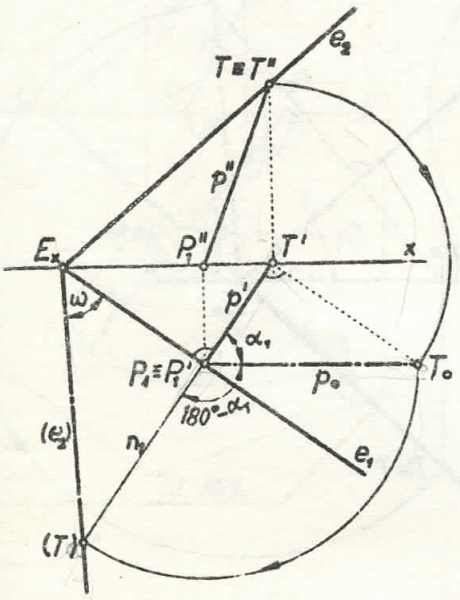
Slikom 140. prikazan ... dio ravnine E, koji je u ... kvadrantu, a nalazi se iz... medju njezinih tragova e_1 i e_2. Na tragu e_2 označena ... koja god točka T i nacrtan ... je njezin tlocrt T'. Točk... T povučena je zatim prikl... nica p prvog traga te ravn... ne, nacrtan je njezin tlo... crt p' i označeno je njez... no prvo probodište P_1.

Kad ravninu E preloži... mo na ravninu Π_1 oko njez... nog prvog traga e_1, okreće se točka T oko e_1 i opisuj... kružnicu okretanja k, ko... joj je središte u točki P_1 a polumjer P_1T. Ravnina o... kretanja N točke T okomita je na tragu e_1, a kako je e_1 u Π_1, ona je okomita i na Π_1. Prvi trag n_1 ra... nine N ide prema tome toč... kom T' okomito na e_1. Ona točka (T), u kojoj kružni... ca okretanja k siječe trag n_1, bit će položaj točke T na Π_1 oko e_1. Budući da je točka (T) udaljena od središta okretanja P_1 toliko, koliko i točka T, moramo naći pravu veličinu dužine P_1T. Preložimo zbog toga, kao u sl.127., pravokutni trokut $P_1T'T$ oko katete P_1T' na Π_1, pa dobijemo trokut $P_1T'T_o$. Hipotenuza P_1T_o toga trokuta jednaka je dužini P_1T, kao i dužina P_1 (T), pa će prema tome kružnica k_o, koja je u Π_1, a polumjer joj je P_1T_o, sjeći trag n_1 u točki (T). Ako sada spojimo točku (T) s točkom E_x, koja za pre... laganja ostaje na istom mjestu, dobijemo pravac (e_2), na koji će pasti drugi trag e_2, kad ravninu E preložimo na Π_1 oko traga e_1. Pravac (e_2) jest dakle preložaj drugog traga e_2 ravnine E na Π_1 oko njezinog prvog traga e_1. Kut ω, što ga čine pravci e_1 i (e_2) jednak je onom kutu, što ga u prostoru čine tragovi e_1 i e_2 ravnine E. Nakon tih objašnjenja možemo riješiti ovaj zadatak:

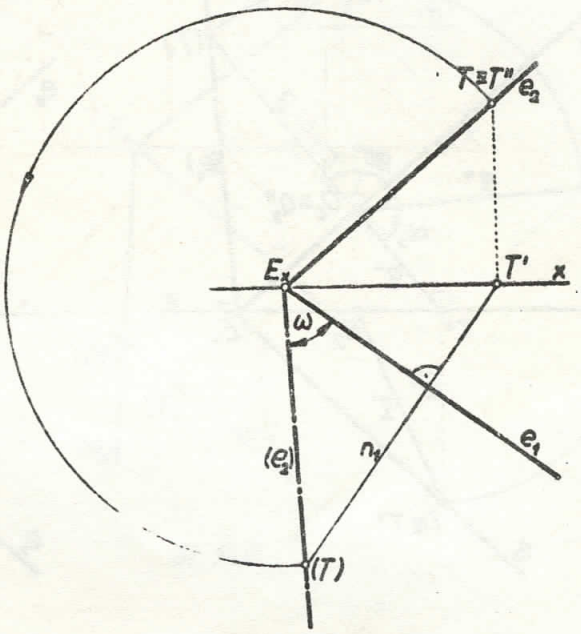
B.- Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E; nadji preložaj drugoga traga te ravnine na Π_1 oko njezinog prvog traga! / sl.141./

Prema objašnjenju iz članka A označimo najprije projekcije T' i T'' koje god točke T drugoga traga e_2 te ravnine, a zatim izvršimo okretanje te točke oko prvoga traga e_1, dok ona padne na Π_1. Da bismo našli polumjer okretanja točke T, nacrtajmo, kao na sl. 129, tlocrt p' i nacrt p'' prikloni... ce prvog traga ravnine E, koja ide točkom T, pa će dužina TP_1 biti polu... mjer okretanja točke T. Prvi trag n_1 ravnine okretanja N točke T poklapa se s pravcem p'. Odredimo zatim pravu veličinu $P_1'T_o$ polumjera okretanja P_1T i prvi prikloni kut α_1 ravnine E kao na sl. 129. Ako sada r... otiramo u ravnini slike točku T_o oko točke P_1' za kut od $180^\circ - \alpha_1$, dobit ćemo na pravcu n_1 preložaj (T) točke T na Π_1 oko traga e_1, a pravac / (T) E_x / bit će tra...

ženi preložaj (e_2) drugoga traga e_2 na Π_1 oko prvoga traga e_1.



Sl. 141.



Sl. 142.

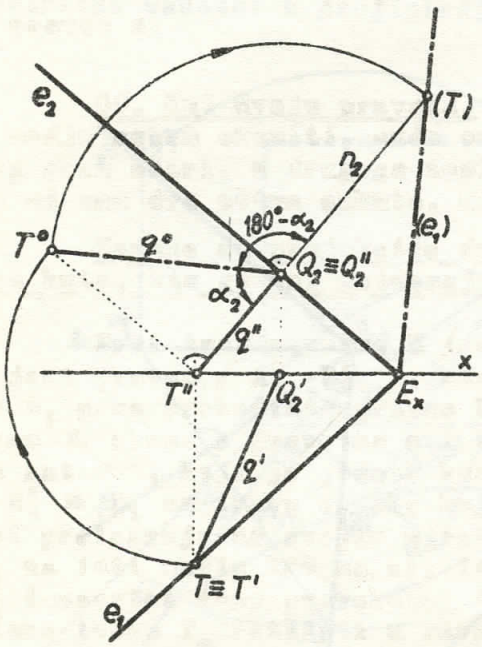
Za vrijeme prelaganja ravnine E oko e_1 ne mijenja se medjusobna udaljenost kojih god dviju njezinih točaka, pa zbog toga mora biti $E_x(T) = E_xT$. Pomoću toga svojstva možemo preložaj (e_2) traga e_2 nacrtati kraće ovako:

Označimo (sl.142.) projekcije T' i T'' koje god točke T traga e_2 i povucimo točkom T' pravac n_1 okomito na e_1. Opišimo zatim iz točke T kružnicu sa središtem u E_x, pa će u presjecištu te kružnice i pravca n_1 biti preložaj (T) točke T na Π_1, a pravac $(e_2) = [(T)\,E_x]$ bit će preložaj drugoga traga e_2 na Π_1 oko prvoga traga e_1.

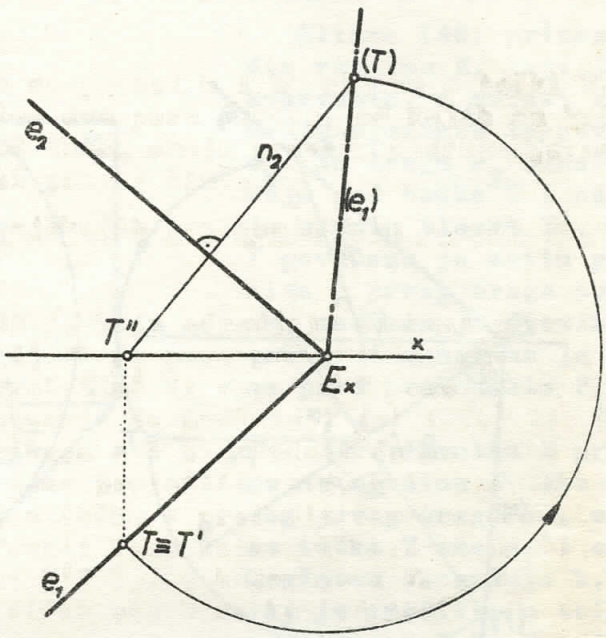
Sad ćemo preložiti na ravninu Π_2 prvi trag ravnine E oko njezinog drugog traga.

C.- Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E; nadji preložaj prvoga traga te ravnine na Π_2 oko njezinog drugog traga! (sl.143.)

Označimo najprije projekcije T' i T'' koje god točke T prvoga traga e_1 te ravnine, a zatim izvršimo okretanje te točke oko drugoga traga e_2, dok ona padne na Π_2. Ravnina okretanja N te točke okomita je na Π_2, a njezin drugi trag n_2 ide točkom T'' okomito na e_2. Polumjer okretanja je na priklonici q drugoga traga, koja ide točkom T, i to od točke T do drugog probodišta Q_2 te priklonice. Prava veličina toga polumjera okretanja je dužina Q_2T^0, koju nadjemo kao na sl. 130., a kut α_2 je drugi prikloni kut ravnine E. Rotiramo li sada u ravnini slike točku T^0 oko točke Q_2'' za kut od $180^0 - \alpha_2$, dobit ćemo na pravcu n_2 preložaj (T) točke T na Π_2 oko traga e_2, a pravac $(e_1) = [(T)\,E_x]$ bit će traženi preložaj prvoga traga e_1 na Π_2 oko drugoga traga e_2.



Sl. 143.



Sl. 144.

Na kraći način možemo taj preložaj načiniti ovako:

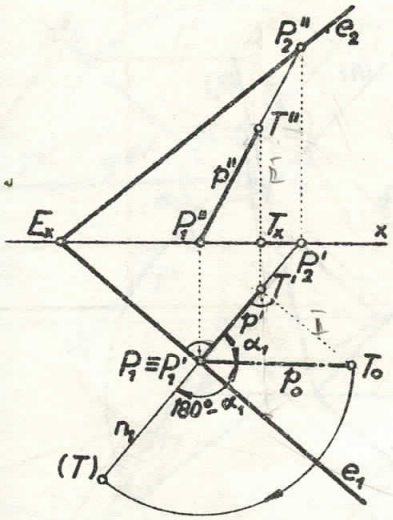
Nacrtajmo projekcije T' i T'' koje god točke T prvoga traga e_1 /sl.144./ i točkom T'' povučemo pravac n_2 okomito na e_2. Opišemo zatim iz točke T kružnicu sa središtem u E_x, pa se u presjecištu te kružnice i pravca n_2 nalazi preložaj (T) točke T na Π_2, a pravac $(e_1) = [\ (T)\ E_x\ ]$ bit će preložaj prvoga traga e_1 na Π_2 oko drugoga traga e_2.

D.- Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E i tlocrt T' točke T, koja je u toj ravnini; preloži točku T na Π_1 oko prvoga traga e_1!

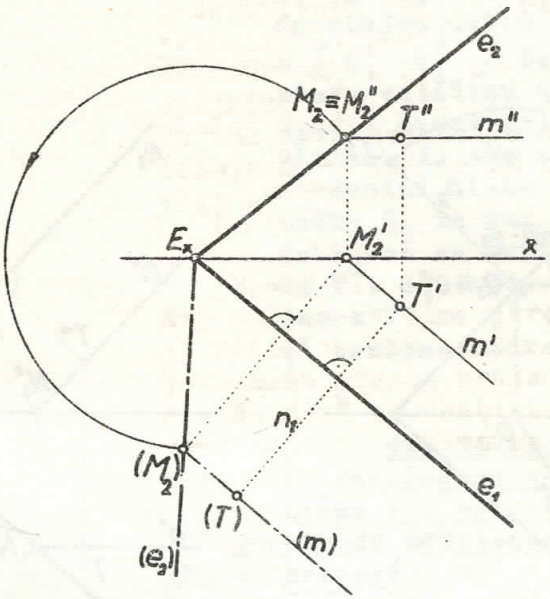
Prvi način: Da bismo odredili nacrt T'' točke T /sl.145./ zamislimo tom točkom priklonicu p prvoga traga. Njezin tlocrt p' ide točkom T' okomito na prvi trag e_1, a na njezinom nacrtu $p'' = [\ P_1''\ P_2''\ ]$ bit će nacrt T'' točke T. Prvi trag n_1 ravnine okretanja N točke T poklapa se s pravcem p', a polumjer okretanja je dužina P_1T. Odredimo zbog toga pravu veličinu P_1T_0 te dužine, pa je zatim rotirajmo u ravnini slike oko točke P_1' za kut od $180° - \alpha_1$ i dobit ćemo na pravcu n_1 preložaj (T) točke T na Π_1 oko prvoga traga e_1.

Drugi način: Nadjimo nacrt T'' točke T pomoću sutražnice prvoga traga m /sl.146./. Nacrtajmo zatim, na način prikazan slikom 142., preložaj (e_2) drugoga traga e_2 na Π_1 oko prvoga traga e_1. Preložajem (M_2) drugoga prodorišta M_2 sutražnice m mora ići preložaj (m) sutražnice m, i to usporedo s prvim tragom e_1, jer za vrijeme prelaganja ravnine E oko traga e_1 ostaje sutražnica m usporedna s tim tragom. Ako sada točkom T' povučemo prvi trag n_1 ravnine okretanja N točke T, i to okomito na e_1, on će presjeći preloženu sutražnicu (m) u preložaju (T) točke T na Π_1 oko prvoga traga e_1.

Sad ćemo izvesti prelaganje na ravninu Π_2 neke točke ravnine E oko drugog traga te ravnine.



Sl. 145.



Sl. 146.

E.- Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E i nacrt T'' točke T, koja je u toj ravnini; preloži točku T na Π_2 oko drugoga traga!

Prvi način: Pomoću priklonice q drugoga traga, koja ide točkom T / sl.147./, nadjimo najprije tlocrt T' te točke. Točkom T'' ide nacrt q'' te priklonice okomito na e_2, a na njezinom tlocrtu $q' \equiv [\, Q_1' \;\; Q_2' \,]$ nalazi se tlocrt T' točke T. Drugi trag n_2 ravnine okretanja N točke T poklapa se s pravcem q'', a polumjer okretanja je dužina TQ_2. Odredimo zbog toga pravu veličinu $T^\circ Q_2$ te dužine, pa je zatim rotirajmo u ravnini slike oko točke Q_2'' za kut od $180^\circ - \alpha_2$ i dobit ćemo na pravcu n_2 preložaj (T) točke T na Π_2 oko drugoga traga e_2.

Drugi način: Pomoću sutražnice n drugoga traga, koja ide točkom T, nadjimo najprije tlocrt T' točke T / sl.148./. Nacrtajmo zatim, kao na sl.144., preložaj (e_1) prvoga traga e_1 na Π_2 oko drugoga traga e_2.

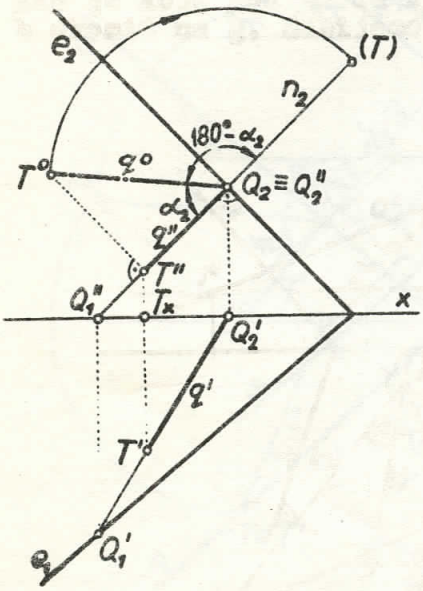
Preložajem (N_1) prvoga probodišta N_1 sutražnice n ide preložaj (n) sutražnice n usporedo s drugim tragom e_2, jer za vrijeme prelaganja ravnine E oko traga e_2 ostaje sutražnica n usporedna s tim tragom.

Povučemo li sada točkom T'' drugi trag n_2 ravnine okretanja N točke T okomito na e_2, on će presjeći preloženu sutražnicu (n) u preložaju (T) točke T na Π_2 oko drugoga traga e_2.

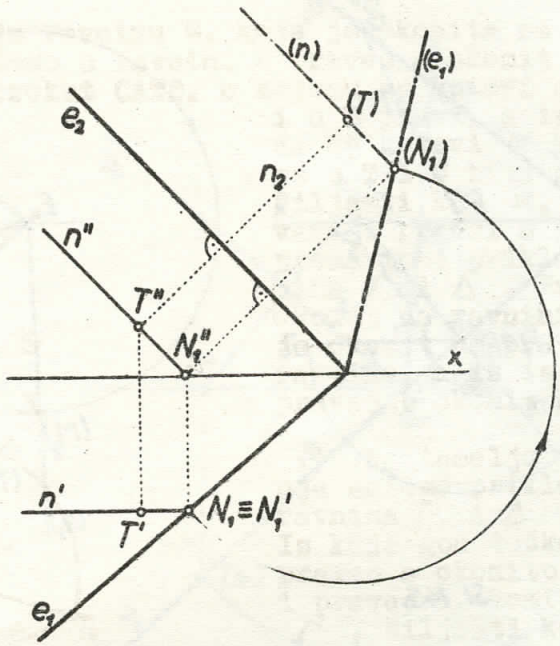
F.- Zadani su tragovi ravnine E i točka (T) u Π_1; okreni tu točku oko prvoga traga e_1, dok ona padne na ravninu E!

Taj zadatak obrnut je od onoga, koji smo riješili na sl.145., pa će i njegovo rješavanje teći obrnutim redom.

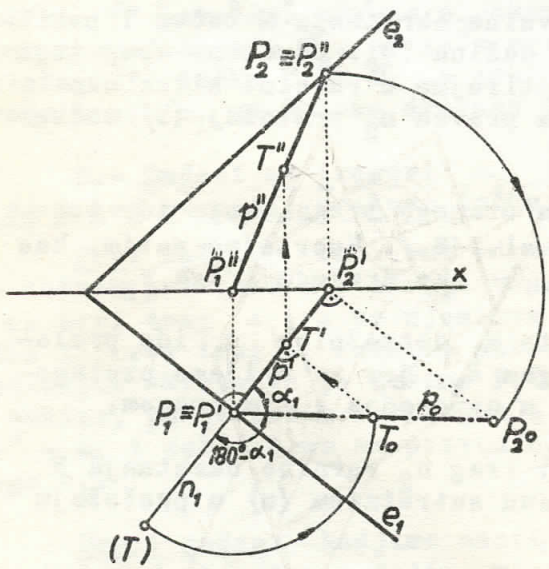
Iz točke (T) povucimo /sl.149./ okomito na trag e_1 prvi trag ravnine okretanja N točke (T). Na n_1 nalazi se i tlocrt $p' \equiv [\, P_1' \;\; P_2' \,]$



Sl. 147.



Sl. 148.



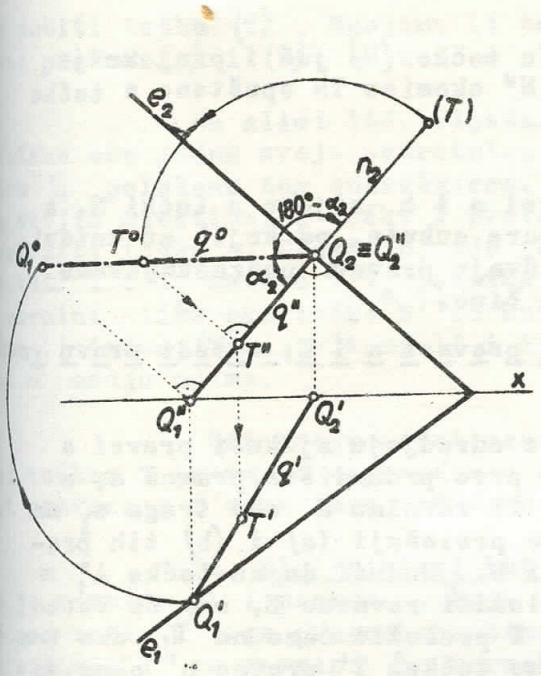
Sl. 149.

priklonice p prvoga traga ravn
ne E, na koju će pasti točka
(T). Nacrtajmo zatim nacrt p"
/ P1" P2" / te priklonice, pr
vu veličinu P1 P2° dužine P1P
i prvi prikloni kut α1 ravnine
E. Ako sada rotiramo u ravnini
slike točku (T) oko točke P1
kut od 180° - α1, dobijemo na
dužini P1 P2° točku T0, a pomo
ću nje nađemo tlocrt T' na p'
i nacrt T" na p" tražene točk
T .

G.- Zadani su tragovi r
nine E, i točka (T) u ravni
II2 ; okreni tu točku oko dr
goga traga e2, dok ona padne
ravninu E 1

Taj je zadatak obrnut o
onoga koji smo riješili na sl
147., pa će i njegovo rješava
nje teći obrnutim redom.

Iz točke (T) povucimo / sl.150./ okomito na e2 drugi trag n2 r
nine okretanja N točke (T). Na n2 nalazi se i nacrt q" = / Q1" Q2' / prili

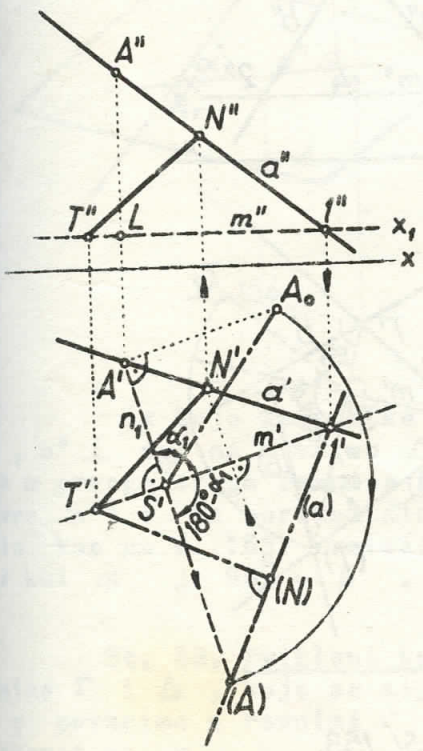


Sl. 150.

nice q drugoga traga ravnine E, na koju će pasti točka (T). Nacrtajmo zatim tlocrt q' = = [Q_1' Q_2'] te priklonice, pravu veličinu Q_2 Q_1^0 dužine Q_2Q_1 i drugi prikloni kut α_2 ravnine E. Ako sada rotiramo u ravnini slike točku (T) oko točke Q_2 za kut od $180^0 - \alpha_2$, dobijemo na dužini $Q_2Q_1^0$ točku T^0, a pomoću nje nadjemo nacrt T" na q" i tlocrt T' na q' tražene točke T.

49. Udaljenost točke od pravca. Zadane su projekcije točke T i pravca a; neka se odredi udaljenost točke od pravca!

Ako u ravnini E, koja je odredjena točkom T i pravcem a, povučemo točkom T okomicu na pravac a, i označimo slovom N nožište te okomice na pravcu a, onda je dužina TN jednaka udaljenosti točke T od pravca a.



Sl 151.

Sutražnica m / sl.151./ prvoga traga ravnine E, koja ide točkom T, imat će nacrt m" = [T" 1"] usporedan s osi x, a njezin tlocrt bit će m' = = [T' 1']. Tom sutražnicom zamislimo novu horizontalnu ravninu π_1, pa će nova os x biti $x_1 \equiv m"$. Da bismo iz točke T spustili okomicu na pravac a, okrenut ćemo ravninu E oko sutražnice m dok ona padne na novu horizontalnu ravninu π_1, t.j. okrenut ćemo je za kut od $180^0 - \alpha_1$, ako je α_1 prvi prikloni kut ravnine E. Označit ćemo zato projekcije A' i A" koje god točke A pravca a, a zatim ćemo tu točku okrenuti oko sutražnice m, kao na sl.137., za kut od $180^0 - \alpha_1$. Prvi trag n_1 ravnine okretanja N točke A ide točkom A' okomito na pravac m' i siječe ga u tlocrtu S' središta okretanja S.

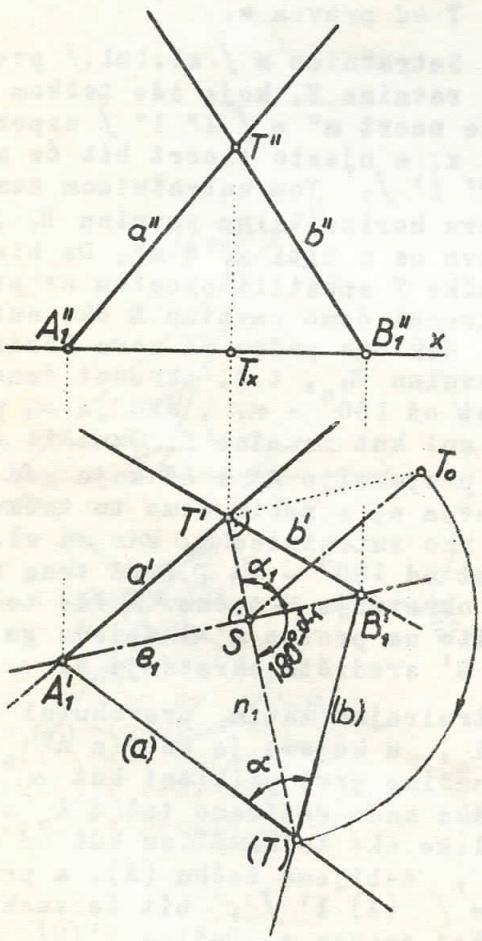
Konstruirajmo zatim pravokutni trokut $S'A'A_0$, u kojemu je kateta $A'A_0 \equiv LA"$, i označimo prvi prikloni kut α_1 ravnine E. Ako sada rotiramo točku A_0 u ravnini slike oko točke S' za kut od $180^0 - \alpha_1$, dobijemo točku (A), a pravac (a) = [(A) 1'], bit će zaokrenuti položaj pravca a. Dužina T'(N), koja iz točke T' ide okomito na pravac (a), jednaka je traženoj udaljenosti točke

T od pravca a. Na sl. 151. nadjene su pomoću točke (N) još i projekcije N' i N'' točke N, kao i projekcije T' N' i T'' N'' okomice TN spuštene s točke T na pravac a.

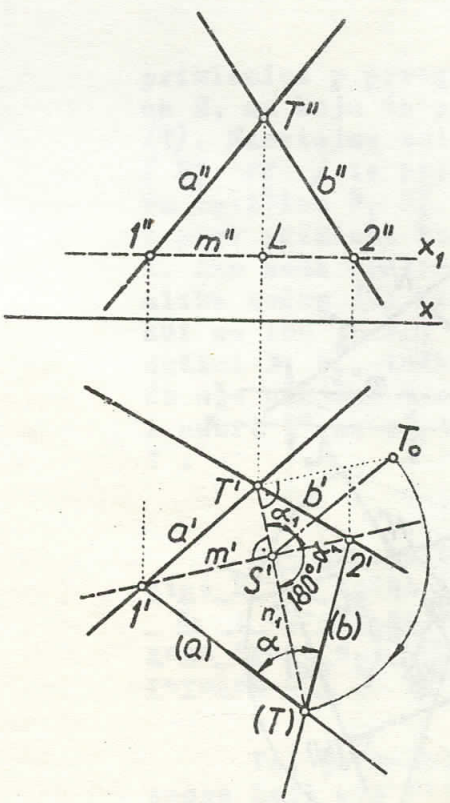
50. Kut dvaju pravaca. Ako se pravci a i b sijeku u točki S, a nisu medju sobom okomiti, onda oni čine dva para sukuta, od kojih su kutovi jednog para oštri, a drugoga tupi. Pod kutom dvaju pravaca podrazumijevamo jedan od ona dva oštra sukuta, koja ti pravci čine.

Zadane su projekcije dvaju sjekućih pravaca a i b; odredi pravu veličinu kuta, što ga oni zatvaraju !

Prvi trag ravnine E / sl.152./, koju odredjuju sjekući pravci a i b, jest pravac $[A'_1 \; B'_1]$, ako je $A'_1 \equiv A_1$ prvo probodište pravca a, a $B'_1 \equiv B_1$ prvo probodište pravca b. Preložimo li ravninu E oko traga e_1 na ravninu π_1 skupa s pravcima a i b, zatvorit će preložaji (a) i (b) tih pravaca kut α , koji je jednak kutu pravaca a i b. Budući da su točke $A'_1 \equiv A_1$ i $B'_1 \equiv B_1$ na tragu e_1 oko kojega ćemo preložiti ravninu E, one će ostati kod prelaganja na svojim mjestima, a točku T preložit ćemo na π_1 oko traga e_1 na isti način kao na sl. 145. Povući ćemo točkom T' pravac n' okomito na e_1 i nacrtat ćemo pravokutni trokut $T'S\,T_o$, u kojem je $T'T_o = T_x\,T''$, zatim ćemo točku T_o rotirati u ravnini slike oko S za kut od $180° - \alpha_1^x$, pa će-



Sl.152.



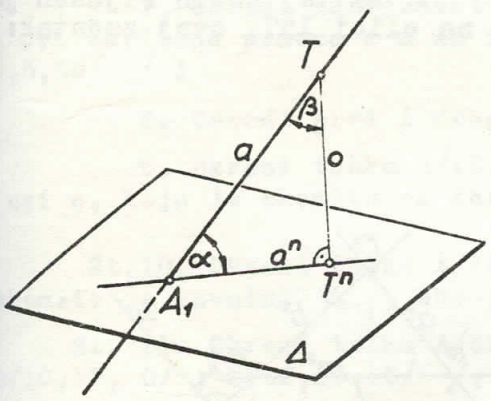
Sl.153.

no dobiti točku (T). Spojimo li točke A_1' i B_1' s točkom (T) dobijemo preložene pravce (a) i (b), te kut α medju njima.

Na slici 153. riješen je isti zadatak, samo je ravnina E preložena oko jedne svoje sutražnice m prvoga traga na novu horizontalnu ravninu Π_1 položenu tom sutražnicom. Točke 1 i 2 ostaju sada kod prelaganja na svojim mjestima, a točku T preložimo na isti način kao što smo na sl.151. preložili točku A. Pravac n_1 ide točkom T^0 okomito na e_1, a u pravokutnom trokutu $T'S'T_0$ kateta $T'T_0$ jednaka je dužini LT''. Rotirajmo zatim točku T_0 u ravnini slike oko točke S' za kut od $180^0 - \alpha_1$, pa dobijemo točku (T). Spojimo li točku (T) s točkama 1' i 2' dobijemo preložene pravce (a) i (b), te kut α medju njima.

Kut dvaju mimoilaznih pravaca odredimo ovako: Povučemo kojom god točkom T pravac c usporedan s a, i pravac d usporedan s b, pa odredimo kut pravaca c i d na gore prikazani način.

St. 51. Prikloni kut pravca prema ravnini. Slikom 154. prikazana je ravnina Δ i pravac a, koji tu ravninu probada u točki A_1. Ako iz koje god točke T toga pravca spustimo okomicu o na ravninu Δ, bit će njezino nožište T^n na ravnini Δ normalna projekcija točke T na toj ravnini, a pravac $a^n = [A_1 T^n]$ bit će normalna projekcija pravca a na toj ravnini. Oštri kut α, što ga pravac a čini sa svojom normalnom projekcijom a^n na ravnini Δ, zove se prikloni kut pravca a prema ravnini Δ.



Sl. 154.

Iz pravokutnog trokuta $T A_1 T^n$ izlazi, da su kutovi α i β komplementarni, pa možemo prema tome prikloni kut α pravca a prema ravnini Δ odrediti na ovaj način: Iz koje god točke T pravca a spustimo okomicu o na ravninu Δ, zatim odredimo pravu veličinu kuta β, što ga čine pravac a i okomica o, na isti način kao u čl. 50., pa će traženi kut α biti $90^0 - \beta$. Na taj je način na sl.155. riješen ovaj zadatak:

Zadani su tragovi ravnine Δ i projekcije pravca a; odredi prikloni kut pravca prema ravnini!

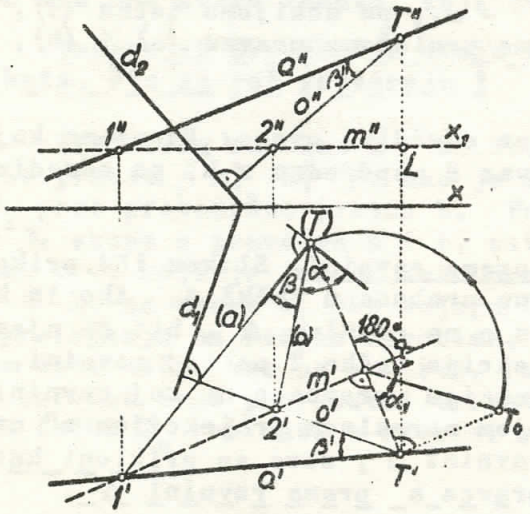
Iz koje god točke T/T', T''/ pravca a spustimo okomicu o / $o' \perp d_1$, $o'' \perp d_2$/ na ravninu Δ. Nacrtajmo zatim projekcije m' i m'' sutražnice m prvoga traga ravnine $E = [a\ o]$, pa oko te sutražnice preložimo pravce a i o na horizontalnu ravninu Π_1 položenu sutražnicom m, na isti način kao na sl.153. Preloženi pravci (a) i (o) zatvaraju kut β, a traženi kut α je $90^0 - \beta$.

St. 52. Prikloni kut dviju ravnina. Slikom 156. prikazane su dvije ravnine Γ i Δ, koje se sijeku u pravcu p. Iz koje god točke T presječnice p povucimo u ravnini Γ pravac g okomit na p, a u ravnini Δ pravac d okomit na p.

Šiljasti kut α, što ga zatvaraju pravci g i d, zove se prikloni kut tih ravnina. Tupi kut β, što ga zatvaraju pravci d i g, suplementar

klonom kutu α .

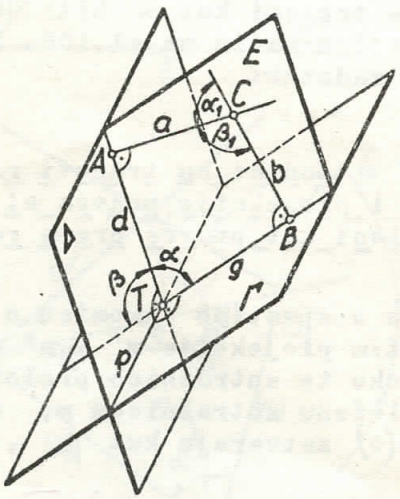
Pravci d i g odredjuju ravninu E, koja je okomita na presječnici p. Ako je koje god točke C povučemo u ravnini E pravac a okomit na d i pravac b okomit na g, dobijemo četverokut CATB, u kojemu su kutovi s vrhovima u A i u B pravi, a iz toga izlazi, da će kutovi α i β_1 s vrhovima u T i C biti suplementarni. Šiljasti kut α_1 , što ga zatvaraju pravci a i b, jednak je prema tome priklonom kutu ravnina Γ i Δ . Pravac a je okomit na ravnini Δ , jer je okomit na pravcima d i p te ravnine, a iz istog uzroka je pravac b okomit na ravnini Γ



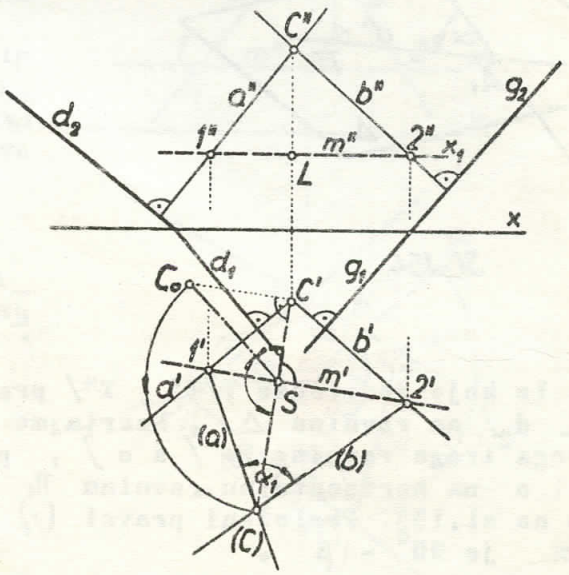
Sl. 155.

Na temelju toga razmatranja možemo prikloni kut dviju ravnina Γ i Δ odrediti ovako: Iz koje god točke C povučemo pravac a okomito na ravninu Δ i pravac b okomito na ravninu Γ , šiljasti kut α_1 , što ga ti pravci zatvaraju, jednak je priklonom kutu α ravnina Γ i Δ .

Na taj način riješen je na slici 157. ovaj zadatak:



Sl. 156.



Sl. 157.

Zadani su tragovi ravnina Γ i Δ i odredi prikloni kut tih ravnina!

Iz koje god točke C / c' , c" / spustimo okomicu a / a' $\perp$ d_1 , a" $\perp$ d_2 / na ravninu Δ i okomicu b / b' $\perp$ g_1, b" $\perp$ g_2 / na ravninu Γ . Nacrtajmo zatim projekcije m' i m" sutražnice m prvoga traga ravnine E $\supset$ [a b], pa oko te sutražnice preložimo pravce a i b na horizontalnu ravninu Π_1 položenu sutražnicom m, na isti način kao na sl. 153. Oštri kut α_1 , što ga zatvaraju preloženi pravci (a) i (b), jednak je priklonom kutu α ravnina Γ i Δ .

53. Vježbe.- 1. Zadane su točke A/10,40,20/ i B/50,45,40/; povuci iz točke A put desne strane horizontalnu poluzraku c, koja zatvara s ravninom Π_2 kut od 30° , a zatim postavi točkom B pravac d, koji poluzraku c siječe pod pravim kutom!

2. Zadana je dužina AB [A/20,30,20/ , B/60,50,40/] ; točkom A položi ravninu E okomito na dužinu AB!

3. Zadana je dužina AB[A/10,40,20/ , B/50,20,50/] ; polovištem te dužine položi ravninu Δ okomito na tu dužinu !

4. S točke D/30,60,65/ spusti okomicu na ravninu trokuta ABC[A/20, 35,30/, B/45,70,15/ , C/ 65,20,60/]! - Uputa: Upotrebi sutražnice ravnine trokuta / čl.34.D./.

5. Na pravcu p $\equiv$ MN [M/50,0,100/ , N/-30,60,60/] odredi onu točku, koja je jednako udaljena od točaka A/-40,0,40/ i B/10,30,40/ !

6. Odredi udaljenost točke T/30,70,40/ od ravnine E/50,-30,60/ !

7. Odredi udaljenost točke T/-20,40,70/ od ravnine, koja je zadana s dva ukrštena pravca c $\equiv$ AB i b $\equiv$ AC [A/-30,10,10/ ,B/ 0,30,-10/ , C/20,0,60/] !

8. Odredi prvi i drugi prikloni kut ravnine E/70,60,50/ !

9. Okreni točku A/10,20,20/ za kut od 90° u negativnom smislu oko osi o, koja je okomita na ravnini Π_1 , ako je o'/30,40,0/ !

St.10. Okreni točku A/10,20,10/ u negativnom smislu oko osi o, koja je okomita na ravnini Π_2 , ako je o" /40,0,20/, dok ne padne na ravninu Π_1!

St. 11. Okreni točku A/50,20,20/ u pozitivnom smislu oko osi o $\equiv$ B[B/10,10, 0/ , C/60,60, 0/], za kut od 90°!

St. 12. Okreni točku A/50,30,20/ u pozitivnom smislu oko osi o $\equiv$ BC [B/10,15,0/ , C/60,65, 0/], dok ne padne na ravninu Π_1 !

St. 13. Okreni točku A/50,20,30/ u pozitivnom smislu oko osi o $\equiv$ BC [B/10,10,10/ , C/60,60,10/] za kut od 90° !

St. 14. Okreni točku A/50,20,30/ u pozitivnom smislu oko osi o $\equiv$ BC [B/10,10,10/ , C/60,60,10/] dok ne padne na horizontalnu ravninu položenu osju o!

St. 15. Okreni dužinu AB[A/10,20,45/ , B/30,40,20/] za kut od 90° u negativnom smislu oko osi o, koja je okomita na ravninu Π_2 , ako je o' / 50,0,20/ !

16. Odredi pomoću okretanja pravu veličinu dužine:

a/ AB[A/10,20,60/ , B/30,40,20/] ,
b/ CD[C/30,50,10/ , D/50,20,50/] ,
c/ EF[E/10,20,60/ , F/50,-10,20/]!

17. Preloži drugi trag ravnine Δ /60,50,40/oko prvoga traga na ravninu Π_1 na oba načina!

18. Preloži prvi trag ravnine Δ /10,-15,-10/ oko drugoga traga na ravninu π_2 na oba načina !

19. Zadana je ravnina Δ /60,30,60/ i u njoj točka T/20,10,z/ ; preloži točku T na ravninu π_1 oko prvoga traga ravnine na oba načina!

20. Zadana je ravnina Δ / 20,-10,-20/ i u njoj točka T /70,y,20/; preloži točku T na ravninu π_2 oko drugoga traga ravnine na oba načina!

21. Zadana je ravnina Σ /60,60,50/ i točka T/30,50,0/ ; okreni tu točku oko prvoga traga s_1, dok ona padne na ravninu Σ !

22. Zadana je ravnina Σ /20,-10,-20/ i točka T /20,0,50/; okreni tu točku oko drugoga traga s_2, dok ona padne na ravninu Σ !

23. Odredi udaljenost točke T/50,40,10/ od pravca MN [M/5,25,5/, N /50,5,40/]!

24. Odredi veličinu kuta, što ga zatvara pravac a ≡ AS[A/10,10, 0/ , S/50,40,60/] s pravcem b ≡ BS[B/ 90,20,0/ , S/50,40,50/] !

St. 25. Odredi prikloni kut pravca p ≡ MN [M/-30,30,10/, N/20,60,50/] prema ravnini Δ /15,-10,-20/ !

St. 26. Odredi prikloni kut ravninâ E/40,-30,40/ i Δ/60,∞,-60 / !

II. NORMALNO PROJICIRANJE NA TRI I VIŠE RAVNINA
TOČKE, DUŽINE , PRAVCA I RAVNINE

§ 7. BOKOCRT

54. Točka

A.- Kad je ravnina osnovke, odnosno pobočke, nekog tijela okomita na osi x, ona se projicira kao dužina u tlocrtu i nacrtu, pa je iz projekcije toga tijela teško odrediti oblik, veličinu i položaj u prostoru takve osnovke, odnosno pobočke. U tom slučaju treba tijelo projicirati još i na *treću ravninu*, koja je okomita na ravninama projekcija π_1 i π_2 , a zove se *bokocrtna ili treća ravnina projekcija* , i označujemo je s π_3 /sl.158./. Ravnine π_1 , π_2 i π_3 sijeku se medju sobom u tri pravca x, y i z, koji su medju sobom okomiti. Oni se zovu *osi* i imaju zajedničku točku O, koja se zove *početna točka ili ishodište*.

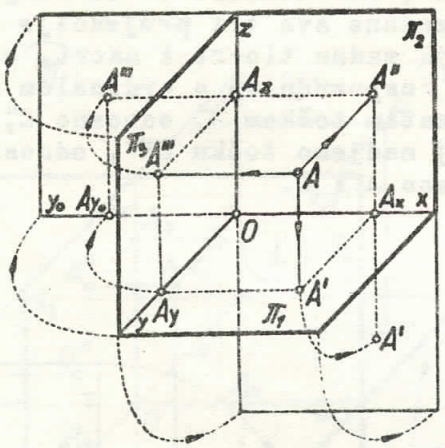
Bokocrt točke A odredit ćemo na jednak način kako smo odredili njezin tlocrt i nacrt. Iz točke A spustit ćemo okomicu na π_3 i odredit ćemo njezino nožište na π_3 . To se nožište zove *bokocrt* ili *treća projekcija* točke A, a označuje se s A''' . Okomica spuštena iz točke A na π_3 zove se *treća zraka projiciranja točke A*.

Iz pravokutnika $AA^{III} A_z A''$ izlazi, da je $A^{III} A_z = A A''$, a kako je $A A'' = A' A_x$, to je $A^{III} A_z = A' A_x$; t.j.

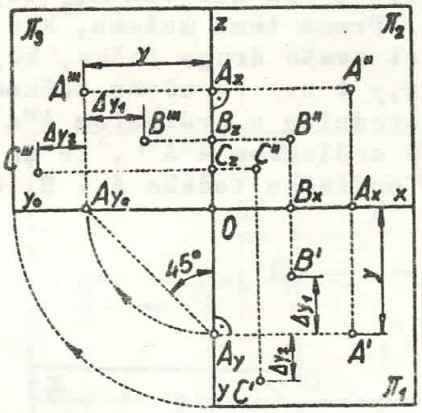
Bokocrt točke udaljen je od osi z toliko, koliko je njezin tlocrt udaljen od osi x.

Iz pravokutnika $A A^{III} A_y A'$ izlazi, da je $A^{III} A_y = A A'$, a kako je $A A' = A'' A_x$, to je $A^{III} A_y = A'' A_x$, t.j.

Bokocrt točke udaljen je od osi y toliko, koliko je njezin nacrt udaljen od osi x.



Sl. 158.



Sl. 159.

B.- Prelaganje ravnina projekcija. Kao što se prelaganje ravnina projekcija Π_1 i Π_2 može izvesti na dva načina (čl.2.) tako se i prelaganje ravnina Π_1, Π_2 i Π_3 može izvesti na dva načina.

1.- Slikom 158. prikazan je prvi način prolaganja ravnina projekcija. Na ravninu Π_2 preloži se ravnina Π_1 skupa s tlocrtom A' točke A oko osi x prema dolje, a ravnina Π_3 skupa s bokocrtom A''' točke A oko osi z nalijevo. Pri tome bokocrt A''' opiše četvrtinu horizontalne kružnice, kojoj je središte u točki A_z, a polumjer A_zA''', dok točka A_y opiše četvrtinu sukladne kružnice, koja je u ravnini Π_1, središte joj je ishodište O, a polumjer OA_y. Nakon prelaganja ravnina projekcija Π_1 i Π_3 na Π_2 dobijemo sliku 159., na kojoj je prikazana konstrukcija bokocrta A''' točke A iz njezinog tlocrta i nacrta. Budući da je sada os y došla u položaj y_o, dakle je pala na os x, izlazi po drugom pravilu iz zadnjeg članka, da bokocrt A''' točke A mora biti na onom pravcu, koji se povuče nacrtom A'' usporedo s osi x, a po prvom pravilu iz zadnjeg članka treba da bokocrt A''' bude isto toliko udaljen od osi z, koliko je tlocrt A' udaljen od osi x, dakle mora biti $A_z A''' = y = A_xA'$. Prema tome se na najkraći način nadje bokocrt A''' točke A tako, da se nacrtom A'' povuče usporednica s osi x i na nju prenese od osi z nalijevo dužina $A_zA''' = A_xA'$.

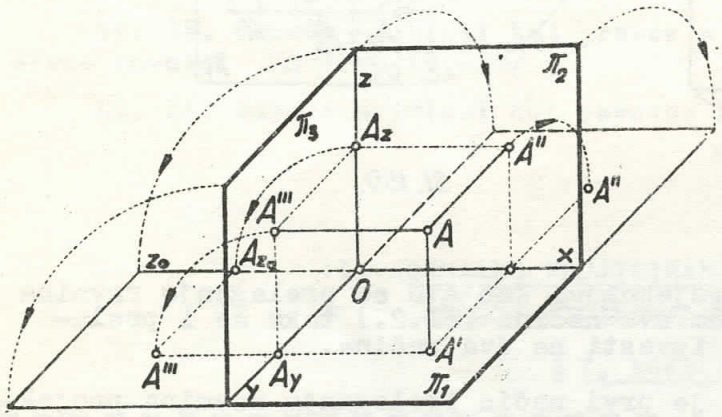
Bokocrt A''' točke A može se naći i ovako: Tlocrtom A' povuče se usporednica $A'A_y$ s osi x, pa se točka A_y okrene za 90° oko ishodišta O u negativnom smislu, t.j. u smislu okretanja kazaljke na satu, i dobije se točka A_{yo}. Točkom A_{yo} povuče se zatim usporednica s osi z, koja presiječe pravac $A''A_z$, koji je usporedan s osi x, u traženom bokocrtu A'''.

Kad se ima pri ruci istokračni crtaći trokut, može se točka A_{yo} dobiti i tako, da se točkom A_y povuče pravac, koji s osi y čini kut od 45°, pa on presiječe pravac y_o u točki A_{yo}.

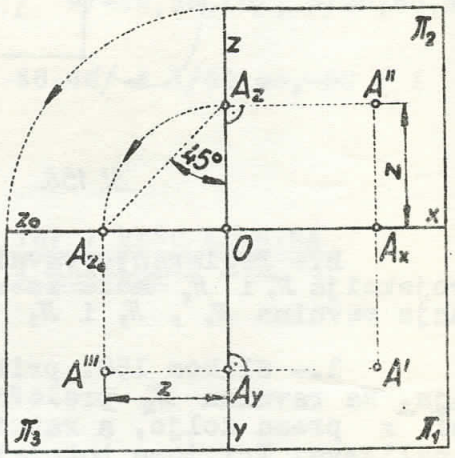
Točka A je sa svoje dvije projekcije A' i A'', ili A'' A''' odre-

djena u prostoru, zato se može naći njezin tlocrt A', kad je zadan njezin nacrt A'' i bokocrt A'''. Točkom A'' povuče se okomica na os x, pa se učini $A_xA' = A_zA'''$!

Na slici 159. nacrtane su još i sve tri projekcije točaka B i C. Vidimo da točka B, kojoj je tlocrt B' za duljinu A_{y_1} povrh tlocrta A' točke A, ima bokocrt B''' za duljinu A_{y_1} nalijevo od bokocrta A''' točke A, dok točka C, kojoj je tlocrt C' za duljinu A_{y_2} ispod A', ima bokocrt C''' za duljinu A_{y_2} nadesno od A'''. Prema tome možemo, kad su zadane sve tri projekcije točke A, odrediti bokocrt svake druge točke, kojoj je zadan tlocrt i nacrt, a da ne upotrebimo osi x,y i z. Povučemo točkom A''' usporednicu s ordinalom $A'A''$, a točkom A' usporednicu s ordinalom $A''A'''$, zatim točkom B'', odnosno C'', nacrtamo usporednicu s ordinalom $A''A'''$, te na njoj nadjemo točku B''', odnosno C''', pomoću razlike ordinata točaka A i B, odnosno A i C.



Sl. 160.



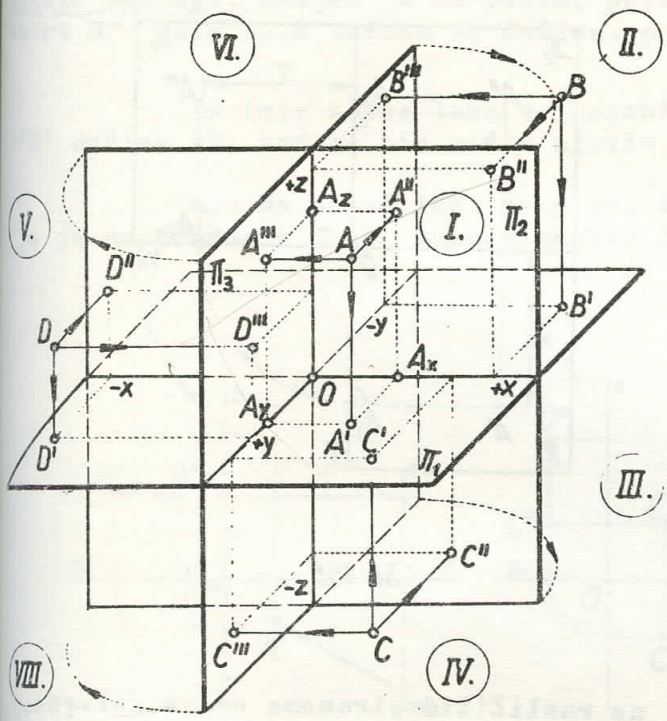
Sl. 161.

2.- Slikom 160. prikazan je drugi način prelaganja ravnina projekcija. Preloži se na horizontalnu ravninu π_1 ravnina π_2 skupa s nacrtom A'' točke A oko osi x prema straga, a ravnina π_3 skupa s bokocrtom A''' točke A oko osi y nalijevo. Pri tome bokocrt A''' opiše četvrtinu vertikalne kružnice, kojoj je središte u točki A_y, a polumjer A_yA''', dok točka A_z opiše četvrtinu sukladne kružnice, koja je u π_2, središte joj je ishodište 0, a polumjer $0A_z$. Nakon prelaganja ravnina projekcija π_2 i π_3 na ravninu π_1, dobijemo sliku 161., na kojoj je prikazana konstrukcija bokocrta A''' točke A iz njezinog tlocrta i nacrta. Tlocrtom A' povuče se usporednica s osi x i na nju prenese od osi y nalijevo dužina $A_yA''' = z = A_xA''$. Ili se nacrtom A'' povuče usporednica $A''A_z$ s osi x, pa se točka A_z okrene za 90^0 oko ishodišta 0 u pozitivnom smislu, t.j. u protivnom smislu okretanja kazaljke na satu, pa se dobije točka A_{z_o}. Točkom A_{z_o} povuče se zatim usporednica s osi y, koja presiječe pravac $A'A_y$, koji je usporedan s osi x, u traženom bokocrtu A'''.

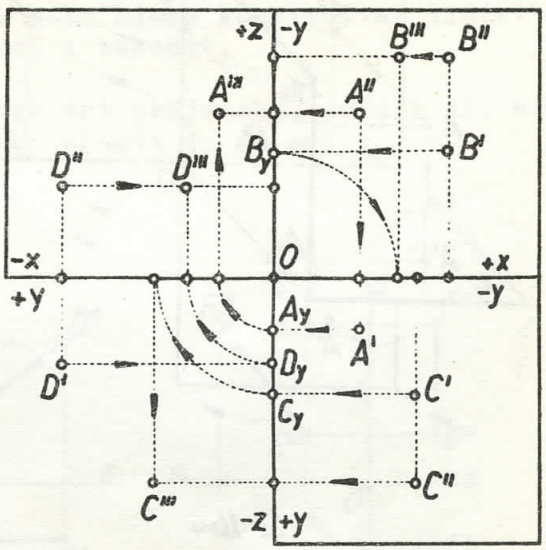
St. 55. Oktanti

A.- Ravnine projekcija π_1, π_2 i π_3 dijele prostor na osam dijelova, koji se zovu oktanti / sl.162./. Od I. do IV. poredani su oktanti s desne strane ravnine π_3, i to onim redom, kako su u čl. 5. poredani kvadranti, a oktanti od V. do VIII. poredani su istim redom s lijeve strane ravnine π_3

. Na slici 162. prikazane su tri projekcije točke A iz I. oktanta, točke B iz II. oktanta, točke C iz IV. oktanta i točke D iz V. oktanta. Položaj svake točke u nekom oktantu može biti odredjen njezinim koordinatama: apscisom, ordinatom i aplikatom / čl.6./



Sl. 162.



Sl. 163.

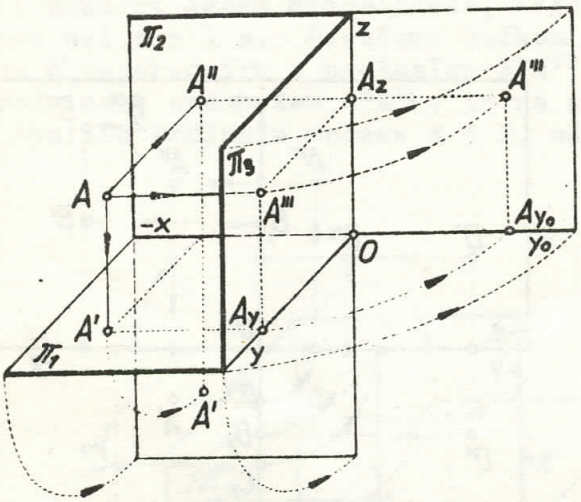
Na pr. točka A ima apscisu $x = OA_x$, ordinatu $y = OA_y$ i aplikatu $z = OA_z$. Koordinate mjerimo od ishodišta O, a pri tome se uzima da su pozitivni: desni dio osi x, prednji dio osi y i gornji dio osi z. Sve će točke prema tome, koje su s desne strane ravnine π_3, imati pozitivnu apscisu, a one s lijeve strane negativnu. Pozitivnu ordinatu imat će one točke, koje su ispred ravnine π_2, a negativnu one, koje su iza π_2. Sve će točke, koje su iznad ravnine π_1, imati pozitivnu aplikatu, a negativnu one, koje su ispod π_1.

Na slici 163. prikazane su sve tri projekcije točaka A, B, C i D, ako je prelaganje ravnana projekcija izvedeno na prvi način, kao na slici 158. i 159. Treće projekcije tih točaka odredjene su pomoću njihovih prvih i drugih projekcija, a uz pripomoć okretanja točaka A_y, B_y, C_y i D_y oko ishodišta O za 90° u negativnom smislu.

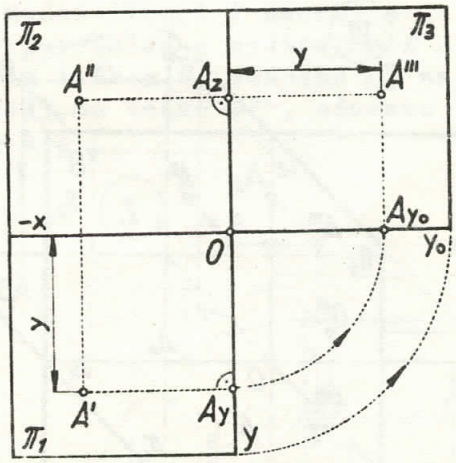
B.- Točka D, koja je u V. oktantu /sl.162./ ima nacrt D'' i bokocrt D''' na lijevoj strani osi z i obadva su iznad osi x. Isto tako bi svaka dužina, ili ravan lik, ili geometrijsko tijelo, koje bi bilo u V. kvadrantu, imalo nacrt i bokocrt na lijevoj strani osi z i obadva iznad osi x. Pri prikazivanju nekog tehničkog objekta crtežom, koji je u V. oktantu, treba izbjegavati, da njegov nacrt i bokocrt budu na istoj strani osi z i obadva iznad osi x, jer bi se tada nacrt toga objekta ukrštavao s bokocrtom, pa bi crtež toga objekta mnogo izgubio od svoje preglednosti. Da se to izbjegne, tehničar će, kad mu je objekt u V. oktantu, izvesti prelaganje ravnina projek-

cija tako, da dobije nacrt i bokocrt predmeta na različitim stranama osi z, a to on postigne na taj način, da ravninu π_3 preloži na ravninu π_2 skupa s bokocrtom oko osi z nadesno.

Takvo prelaganje prikazano je slikom 164. Točka A, koja je u V.ok-

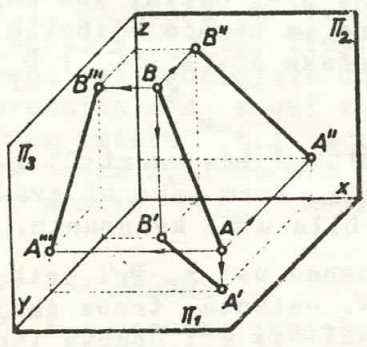


Sl. 164.

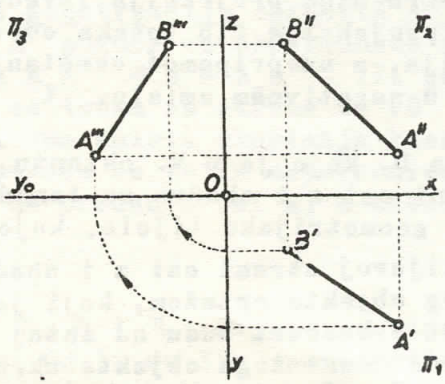


Sl. 165.

tantu, ima sada nacrt A'' i bokocrt A''' na različitim stranama osi z /sl.165./. Konstrukcija bokocrta A''' iz tlocrta i nacrta točke A na slici 165. razlikuje se od one iz slike 159. samo u toliko, što sada treba točku A okrenuti za 90° oko ishodišta O u pozitivnom smislu, a ne kao prije u negativnom smislu, te što se sada bokocrt A''' nalazi na desnoj strani osi z, a ne na lijevoj. Na taj način dobiveni bokocrt točke A zove se desni bokocrt ili bokocrt s desne strane, jer se ravnina π_3 nalazi s desne strane te točke, a bokocrt točke A iz slike 159. zove se lijevi bokocrt ili bokocrt s lijeve strane, jer je ravnina π_3 bila s lijeve strane te točke. Kod složenijeg tehničkog objekta treba kadikad nacrtati njegov lijevi i desni bokocrt, a to znači, da taj objekt treba normalno projicirati jedanput na ravninu π_3, koja se postavi s lijeve strane, a drugi put na ravninu π_3, koja se postavi s njegove desne strane.



Sl. 166.



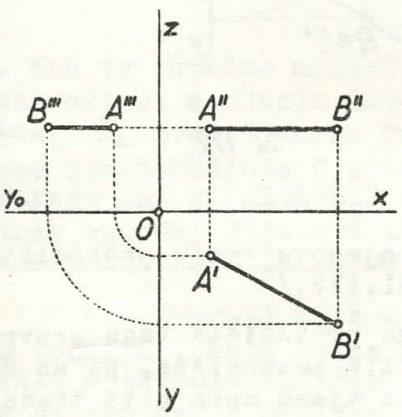
Sl. 167.

56. Dužina

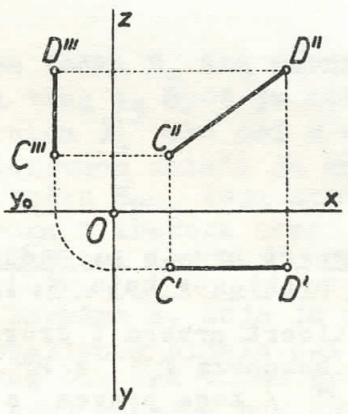
A.- Slikom 168. prikazane su tri ravnine projekcija Π_1, Π_2 i Π_3, dužina AB, te sve tri njezine projekcije. Ako je A''' bokocrt jedne, a B''' bokocrt druge krajnje točke te dužine, onda je dužina $A'''B'''$ bokocrt dužine AB. Bokocrti svih točaka dužine AB ispunili bi dužinu $A'''B'''$. Na slici 167. riješen je ovaj zadatak: Zadan je tlocrt i nacrt dužine AB; odredi njezin bokocrt. Nadjen je na način, prikazan slikom 159., bokocrt A''' i bokocrt B''' krajnjih točaka te dužine, pa su ti bokocrti spojeni dužinom $A'''B'''$.

Iz iste slike lako se razabire, kako bi se konstruirao tlocrt A'B' dužine AB, kad bi bio zadan njezin nacrt i bokocrt.

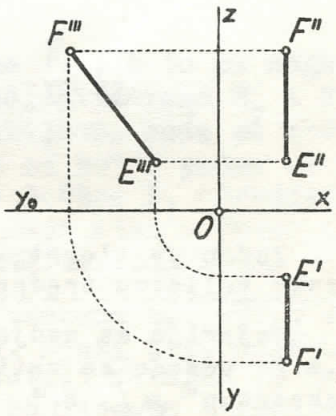
B.- Na slici 168. nacrtane su sve tri projekcije dužine AB, koja je usporedna s Π_1. Bokocrt takve dužine okomit je na os z.



Sl.168.



Sl. 169.



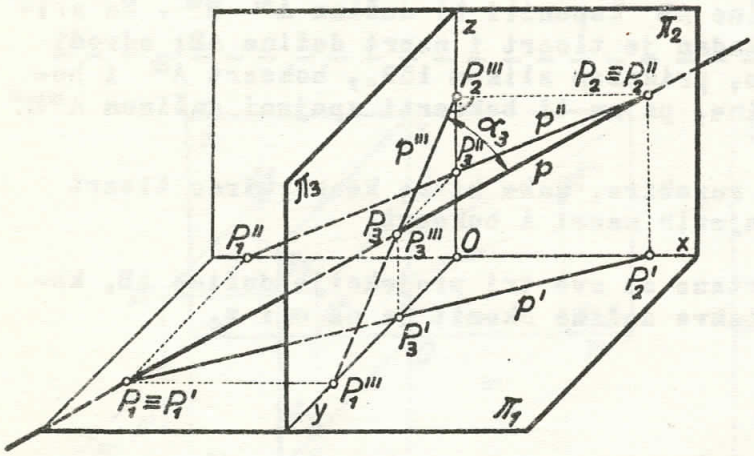
Sl.170.

Slikom 169. prikazane su sve tri projekcije dužine CD, koja je usporedna s Π_2. Njezin bokocrt usporedan je s osi z.

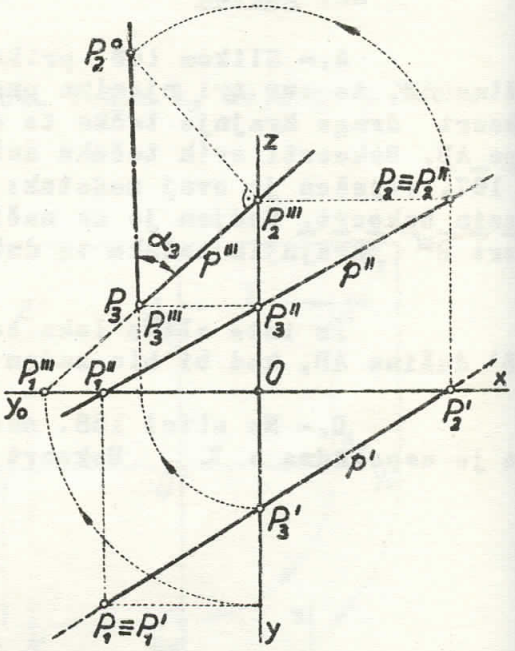
Na slici 170. nacrtane su sve tri projekcije dužine EF, koja je usporedna s Π_3. Bokocrt $E'''F'''$ te dužine jednak je njezinoj pravoj veličini.

57. Pravac. U čl. 20. upoznali smo projekcije, zatim prvo i drugo probodište, te prvi i drugi prikloni kut nekog pravca p, a sada, kad smo uveli još jednu ravninu projekcija Π_3, ima da upoznamo još i treću projekciju pravca, njegovo treće probodište i njegov treći prikloni kut.

Slikom 171. prikazane su ravnine projekcija Π_1, Π_2 i Π_3, te pravac p, koji probada Π_3 u njegovom trećem probodištu P_3. Bokocrt p''' pravca p odredjen je bokocrtom P_1''' njegovog prvog probodišta P_1 i bokocrtom P_2''' njegovog drugog probodišta P_2. Na bokocrtu $p''' = (P_1''' P_2''')$ pravca p nalazi se njegovo treće probodište P_3 i bokocrt P_3''' toga probodišta, jer je $P_3 \equiv P_3'''$. Tlocrt P_1' trećeg probodišta P_3 mora biti na tlocrtu p' pravca p i na osi y, jer se tlocrt svake točke ravnine Π_3, nalazi u osi y, pa će P_3' biti u presjecištu pravca p' i osi y. Nacrt P_3'' trećeg probodišta P_3 mora biti na nacrtu p'' pravca p i na osi z, jer je nacrt svake točke ravnine Π_3 u osi z, pa će P_3'' biti u presjecištu pravca p'' i osi z. Kut α_3, koji pravac p zatvara sa svojim bokocrtom, zove se treći prikloni kut toga pravca. Nakon tih objašnjenja možemo sada riješiti ovaj zadatak:



Sl. 171.



Sl. 172.

Zadan je tlocrt i nacrt pravca p, nadji njegovo treće probodište P_3 i pravu veličinu trećega priklonog kuta α_3 !/sl.172./

Najprije se nadje tlocrt prvoga i drugoga probodišta toga pravca /čl.20.A./. Odrede se zatim bokocrti P_1''' i P_2''' tih probodišta, pa se dobije bokocrt $p''' \equiv [\ P_1''' \ P_2'''\ ]$ toga pravca, a na njemu mora biti treće probodište $P_3 \equiv P_3'''$. Njegov tlocrt P_3' nalazi se u presjecištu pravca p' i osi y, a njegov nacrt P_3'' je u presjecištu pravca p'' i osi z, pa će ordinala povučena točkom P_3''' okomito na os z presjeći pravac p''' u traženom trećem probodištu $P_3 \equiv P_3'''$.

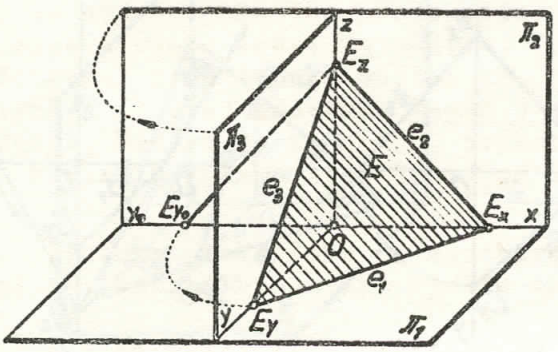
Da bi se našla prava veličina trećeg priklonog kuta, treba pravokutni trokut $P_2''' \ P_3 \ P_2$ / sl.171./ preložiti oko katete $P_2''' \ P_3$ na π_3. Postavi se zbog toga u točki P_2''' okomica na pravac p''' /sl.172./ i učini se $P_2''' \ P_2^0 = P_2'' \ P_2$, pa je α_3 jednak onom kutu, što ga zatvara hipotenuza $P_3 P_2^0$ s katetom $P_3 \ P_2'''$ pravokutnog trokuta $P_2''' \ P_3 \ P_2^0$

58. Ravnina

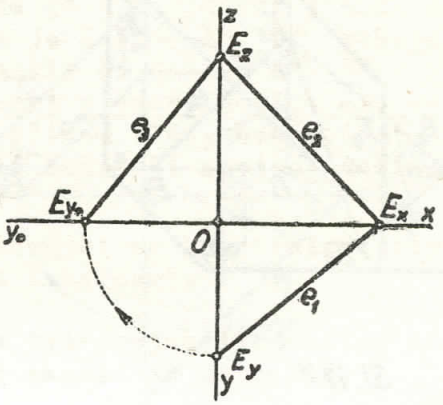
A.- Pravac e_3, u kojemu ravnina E siječe ravninu π_3, zove se treći trag te ravnine /sl.173./. Kad imamo prvi i drugi trag ravnine E i na njima točke E_x, E_y i E_z, onda je treći trag $e_3 = [\ E_y \ E_z\ ]$.

Ako na ravninu π_2 preložimo ravninu π_3 skupa s trećim tragom e_3 oko osi z nalijevo, a ravninu π_1 skupa s prvim tragom e_1 oko osi x prema dolje, dobijemo sl. 174. Točku E_y okrenemo pri tome u negativnom smislu za 90° oko ishodišta 0, pa dobijemo točku E_{y_0}, koja nam s točkom E_z određuje treći trag e_3. Uobičajeno je, kad se crtaju sva tri traga neke ravnine, koja siječe os x u nekoj točki njezinog pozitivnog dijela, da se od tih tragova nacrtaju punom crtom samo oni dijelovi, koji su u I. oktantu.-

B.- Slikom 175. prikazana je ravnina E, kojoj je točka E_x na pozitivnom dijelu osi x kao na sl.173., ali su njezini tragovi e_1 i e_2 divergen-



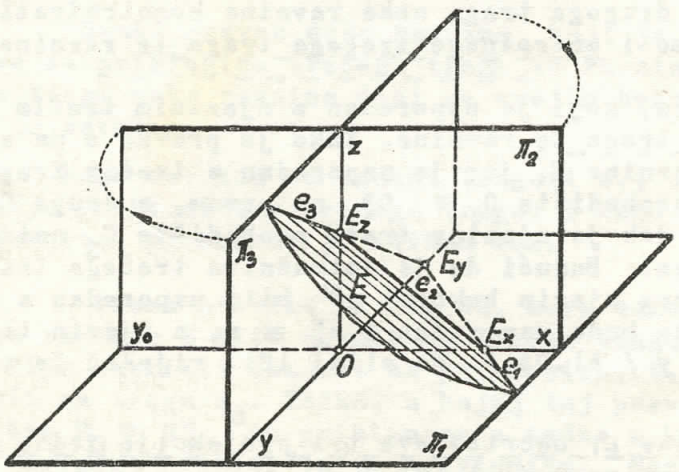
Sl. 173.



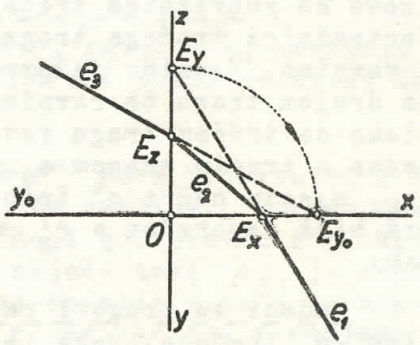
Sl. 174.

tni. Kod te ravnine nalazi se točka E_y iza ravnine Π_2, i to na negativnom dijelu osi y, a njezin treći trag e_3 opet je odredjen točkama E_y i E_z. Kad ravninu Π_3 preložimo na ravninu Π_2 oko osi z nalijevo, onda se točka E_y okrene oko ishodišta O u negativnom smislu za kut od 90° i padne na pozitivnu stranu osi x (sl.176.) u točku E_{yo}, koja nam s točkom E_z odredjuje treći trag e_3. Oni dijelovi prvoga i trećega traga, koji nisu u prvom oktantu, nacrtani su, kako je to uobičajeno, isprekidanom crtom.

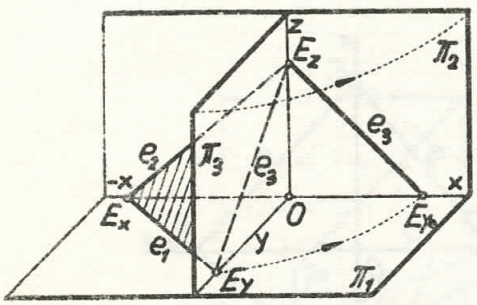
C.- Tragovi e_1 i e_2 ravnine E, koja je prikazana sl. 177., sijeku se u točki E_x, koja je na negativnom dijelu osi x. Svaki lik, koji bi se nalazio u trokutu $E_x E_y E_z$, imao bi, kad bismo preložili ravninu Π_3 na ravninu Π_2 oko osi z nalijevo, svoj nacrt i bokocrt na lijevoj strani osi z i oboje iznad osi x. Da se to izbjegne, tehničar će u takovom slučaju preložiti ravninu Π_3 na ravninu Π_2 oko osi z nadesno, kako je to prikazano slikom 177.



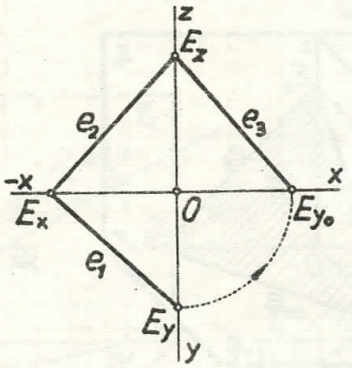
Sl. 175.



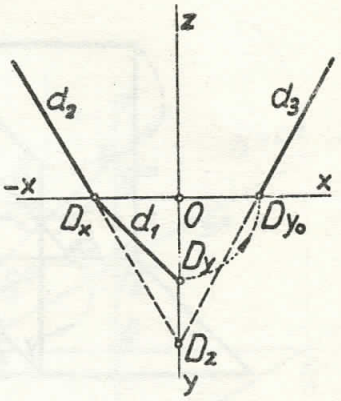
Sl. 176.



Sl. 177.



Sl. 178.



Sl. 179.

kad su zadani tragovi e_1 i e_2 jedne takove ravnine E / sl.178./, odredjivanje trećega traga e_3 razlikuje se od ovog na sl. 174. samo u toliko, što sada treba točku E_y okrenuti za kut od 90^0 oko ishodišta 0 u pozitivnom smislu, da se dobije točka E_{y_o}, a ne kao prije u negativnom smislu.

D.- Na sl. 179. izvedena je konstrukcija trećeg traga d_3 ravnine Δ, kojoj su tragovi d_1 i d_2 divergentni, a sijeku se u točki D_x, koja je na negativnom dijelu osi x, kad je ravnina π_3 preložena na ravninu π_2 oko osi z nadesno. Sada je točka $D_z \equiv (d_2\ z)$ na negativnom dijelu osi z, a točku D_{y_o} dobijemo okretanjem točke D_y za kut od 90^0 oko ishodišta 0 u pozitivnom smislu.

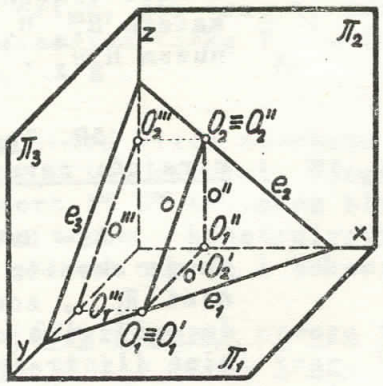
Uobičajeno je, kad se crtaju sva tri traga neke ravnine, koja siječe os x u nekoj točki njezinog negativnog dijela, da se od tih tragova nacrtaju punom crtom samo oni dijelovi, koji su u V. oktantu, pa su tako i nacrtani tragovi ravnine E na sl. 178., kao i ravnine Δ na sl.179.

E.- U čl. 33. upoznali smo sutražnice prvoga i drugoga traga neke ravnine i njihovu upotrebu, a sada, kad smo uveli i treću ravninu projekcija π_3, te znademo iz prvoga i drugoga traga neke ravnine konstruirati njezin treći trag, treba da upoznamo i sutražnice trećega traga te ravnine.

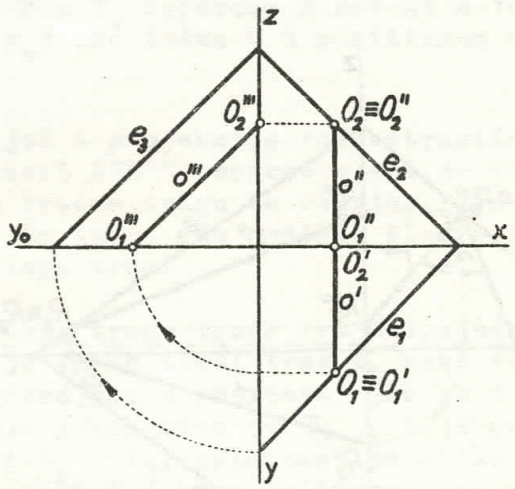
Svaki pravac neke ravnine, koji je usporedan s njezinim trećim tragom, zove se sutražnica trećega traga te ravnine. Tako je pravac o na sl. 180. sutražnica trećega traga ravnine E, jer je usporedan s trećim tragom e_3 te ravnine. Njezino je prvo probodište $0_1 \equiv 0_1'$ na prvom, a drugo $0_2 \equiv 0_2''$ na drugom tragu te ravnine, dok je njezino treće probodište 0_3 neizmjerno daleko na trećem tragu ravnine. Budući da je sutražnica trećega traga o usporedna s trećim tragom e_3, mora njezin bokocrt o''' biti usporedan s $e_3''' \equiv e_3$, njezin nacrt o'' treba da bude usporedan s $e_3'' \equiv z$, a njezin tlocrt o' mora biti usporedan s $e_3' \equiv y$ / čl.23./. Na slici 181. riješen je ovaj zadatak:

Zadani su tragovi ravnine E; nacrtaj sve tri projekcije jedne sutražnice o trećega traga te ravnine ! / sl.181./

Povučemo li koji god pravac o''' usporedo s e_3 od sjecišta $0_1'''$ s osi y_o do sjecišta $0_2'''$ s osi z, onda će točka $0_1'''$ biti bokocrt prvoga probodišta, a točka $0_2'''$ bokocrt drugoga probodišta sutražnice o trećega traga, kojoj je bokocrt pravac o'''. Odredimo zatim na drugom tragu e_2, pomoću ordinate povučene točkom $0_2'''$ okomito na os z, nacrt $0_2'' \equiv 0_2$ drugoga



Sl. 180.



Sl. 181.

probodišta te sutražnice, a zatim njegov tlocrt $0_2'$ na osi x. Točkom $0_2''$ ide sada nacrt o" te sutražnice usporedo s osi z, a točkom $0_2'$ ide njezin tlocrt o' usporedo s osi y.

Projekcije sutražnice trećeg traga mogu se nacrtati i drugim redom: Povučemo koji god pravac okomito na os x od sjecišta $0_1'$ s tragom e_1 do sjecišta $0_2''$ s tragom e_2 ravnine E, pa imamo tlocrt o' i nacrt o" sutražnice trećega traga. Odredimo zatim bokocrt $0_1'''$ prvoga probodišta i bokocrt $0_2'''$ drugoga probodišta te sutražnice, pa će njezin bokocrt biti pravac $o''' \equiv [0_1''' \; 0_2''']$. Ako se konstrukcija točno izvede, mora biti o''' usporedan s tragom e_3 ravnine E.

St. F.- U čl. 45. upoznali smo priklonice prvoga i drugoga traga neke ravnine, kao i prvi i drugi prikloni kut te ravnine, a sada treba da upoznamo priklonicu trećega traga kao i treći prikloni kut te ravnine.

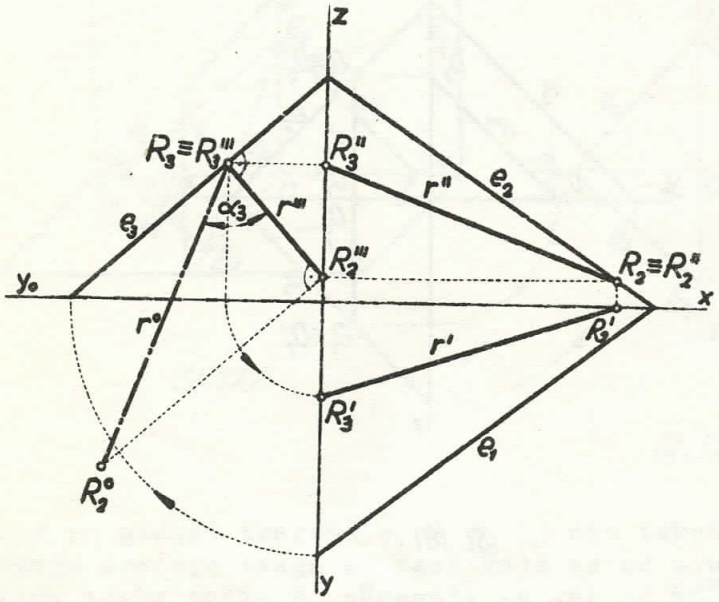
Svaki pravac neke ravnine, koji je okomit na njezinom trećem tragu, zove se priklonica trećega traga te ravnine, a kut što ga priklonica trećega traga neke ravnine čini sa svojim bokocrtom, zove se treći prikloni kut te ravnine.

Kako se, kad su zadani tragovi e_1, e_2 i e_3 ravnine E, nacrtaju projekcije priklonice r trećega traga, i kako se odredi treći prikloni kut te ravnine, prikazano je slikom 182.

Prema pravilu iz čl. 42. mora bokocrt r''' neke priklonice r trećega traga ravnine E biti okomit na trećem tragu e_3 te ravnine. Moramo zbog toga najprije nacrtati bokocrt te priklonice, t.j. koji god pravac r''', koji je okomit na tragu e_3. Točka, u kojoj taj pravac siječe trag e_3, je treće probodište $R_3 \equiv R_3'''$ te priklonice, a točka u kojoj on siječe os z je bokocrt R_2''' drugoga probodišta te priklonice. Nacrt r" priklonice r nadjemo pomoću nacrta R_2'' i R_3'' njezinih probodišta R_2 i R_3 / čl.57./, a njezin tlocrt r' odredimo pomoću tlocrta R_2' i R_3' tih probodišta.

Pravu veličinu trećega priklonog kuta α_3 dobit ćemo tako, da ćemo pravokutni trokut $R_3R_2'''P_2$ preložiti oko katete R_3R_2''' na ravninu Π_3. Ako prema tome postavimo u R_2''' okomicu na r''' i učinimo $R_2'''R_2^0 = R_2'''R_2''$, on-

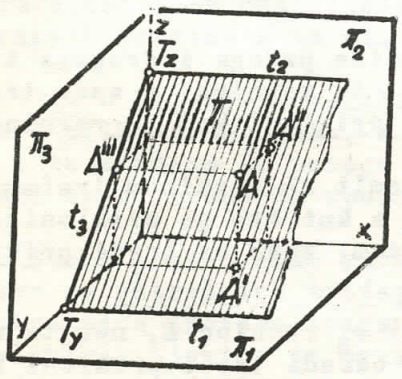
da će u pravokutnom trokutu $R_3R_2^{III}R_2^{o}$ zatvarati traženi kut α_3 kateta $R_2^{III}R_3$ s hipotenuzom $R_3R_2^{o}$.



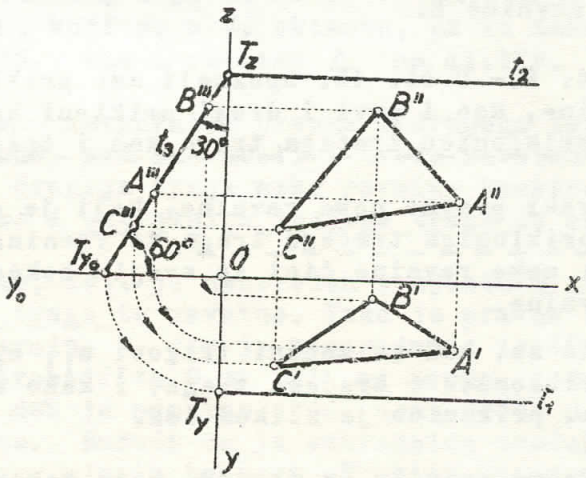
Sl. 182.

59. Treća projicirajuća ravnina

A.– Ravnina, koja je okomita na ravnini π_3, zove se treća projicirajuća ravnina ili treća ravnina prometalica. Ravnina T, koja je prikazana slikom 182., okomita je na π_3, a kosa prema π_1 i π_2. Njezin prvi trag t_1 okomit je na osi y, a drugi t_2 okomit je na osi z, dakle njezini tragovi t_1 i t_2 usporedni su s osi x. Budući da je treća zraka projiciranja AA^{III} koje god točke A ravnine T okomita na π_3, ona je u ravnini T, pa zbog toga mora biti i A^{III} te točke biti u trećem tragu r_3 te ravnine. To važi i za svaki ravan lik, koji je u toj ravnini.



Sl. 183.



Sl. 184.

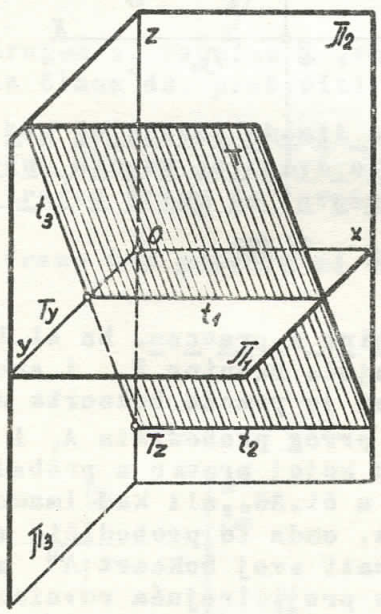
Svaki ravan lik, koji je u trećoj projicirajućoj ravnini, ima svoj bokocrt u trećem tragu te ravnine.

Na sl. 184. nacrtani su tragovi t_1, t_2 i t_3 treće projicirajuće ravnine T, koja čini s ravninom π_1 kut od 60°, a s ravninom π_2 kut od 30°. Njezin treći trag t_3 mora zatvarati s osi y_o kut od 60°, a s osi

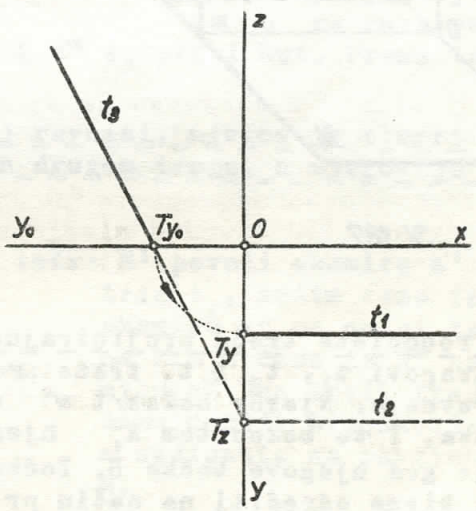
kut od 30°, zbog toga je na toj slici bio najprije nacrtan taj trag, a pomoću njega odredjeni su tragovi t_1 i t_2. Trag t_2 ide točkom $T_2 = (t_3\ z)$ usporedo s osi x, dok trag t_1 ide točkom T_y usporedo s osi x; a točku T_y dobijemo rotacijom točke $T_{y_o} = (t_3\ y_o)$ oko točke 0 u pozitivnom smislu za kut od 90°.

Na istoj slici nacrtane su još i projekcije raznostraničnog trokuta ABC, koji je u toj ravnini. Njegov nacrt A"B"C" možemo uzeti po volji, ali njegov bokocrt A''' B''' C''' mora biti u trećem tragu te ravnine. Tlocrt A'B'C' toga trokuta treba konstruirati, i to tako, da nadjemo tlocrt svakoga vrha trokuta pomoću nacrta i bokocrta toga vrha.

B.- Odredjivanje prvoga i drugog traga treće projicirajuće ravnine, kad je zadan njezin treći trag. Kad je zadan treći trag t_3 neke treće projicirajuće ravnine T, ona je potpuno odredjena u prostoru, jer se tim tragom može položiti samo jedna ravnina, koja je okomita na π_3. Koji položaj zauzimaju u tom slučaju njezini tragovi t_1 i t_2, prikazano je slikom 183. Treći trag t_3 te ravnine siječe os y u točki T_y, koja je ispred osi x, a os z u točki T_z, koja je povrh te osi, pa se zbog toga njezin prvi trag t_1 nalazi na sl. 184. ispod osi x, a drugi trag t_2 povrh te osi. Sada ćemo upoznati dva druga karakteristična položaja treće projicirajuće ravnine.



Sl. 185.



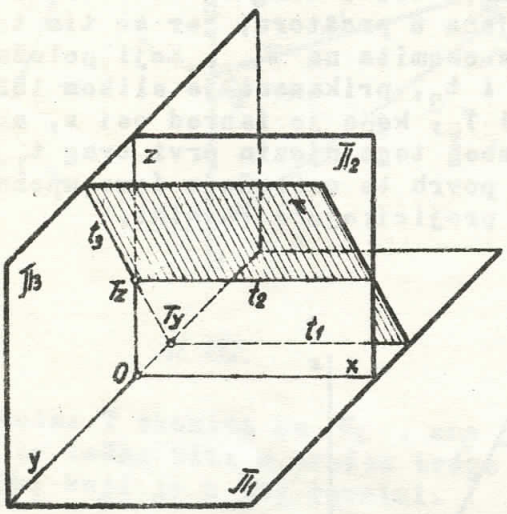
Sl. 186.

Slikom 185. prikazana je treća projicirajuća ravnina T, kojoj treći trag t_3 siječe os y u točki T_y, koja je ispred osi x, a os z u točki T_z, koja je ispod osi x, pa će zbog toga njezini tragovi t_1 i t_2 biti obadva ispod osi x nakon prelaganja ravnina projekcija na ravninu slike.

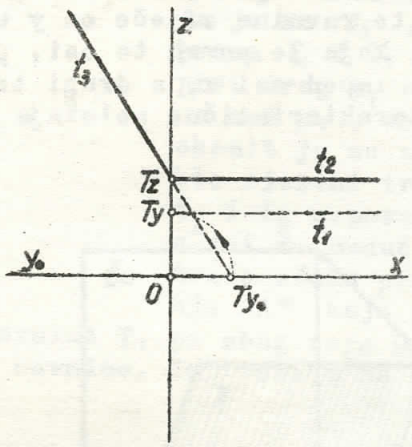
Na sl.186. nacrtani su tragovi jedne takve treće projicirajuće ravnine. Njezin treći trag t_3, koji je prvi bio nacrtan na toj slici, siječe os y_o, u točki Ty_o, koja je nalijevo od točke 0, a os z u točki T_z, koja je ispod osi x. Točkom T_z ide njezin drugi trag t_2 usporedo s osi x, a točkom T_y, koju dobijemo rotacijom točke T_{y_o} oko točke 0 u pozitivnom smislu za kut od 90°, ide njezin prvi trag t_1 usporedo s osi x.

Slikom 187. prikazana je takva treća projicirajuća ravnina, kojoj treći trag t_3 siječe os y u točki T_y, koja je iza osi x, a os z u točki T_z, koja je povrh osi x. Nakon prelaganja ravnina projekcija na ravninu slike bit će tragovi t_1 i t_2 takve treće projicirajuće ravnine obadva povrh osi x.

Na slici 188. nacrtani su tragovi jedne takve treće projicirajuće ravnine. Njezin treći trag t_3, koji je bio prvi nacrtan na toj slici, siječe os y_o u točki T_{yo}, koja je nadesno od točke 0, a os z u točki T_z, koja je povrh osi x. Točkom T_z ide njezin drugi trag t_2 usporedo s osi x, a točkom T_y, koju dobijemo rotacijom točke T_{yo} oko točke 0 u pozitivnom smislu za kut od 90^0, ide njezin prvi trag t_1 usporedo s osi x.



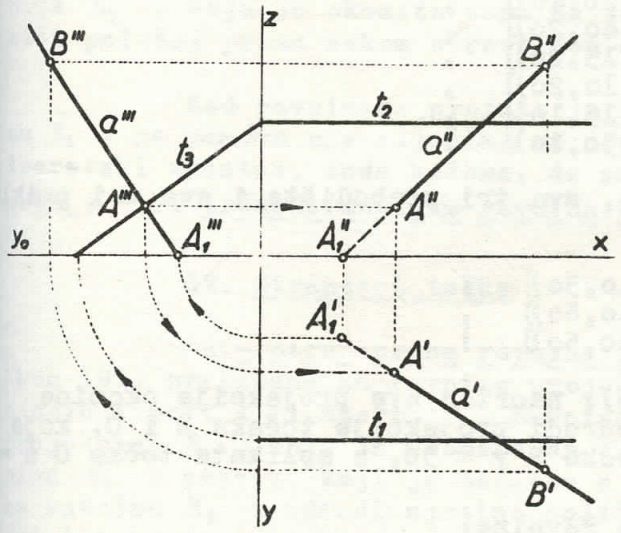
Sl. 187



Sl. 188.

C.- Probodište treće projicirajuće ravnine s pravcem. Na sl.189. nacrtani su tragovi t_1, t_2 i t_3 treće projicirajuće ravnine T, i sve tri projekcije pravca a. Njegov bokocrt a''' odredjen je pomoću bokocrta dviju njegovih točaka, i to bokocrtom A'''_1 njegovog prvog probodišta A_1 i bokocrtom B''' koje god njegove točke B. Točku A, u kojoj pravac a probada ravninu T, mogli bismo odrediti na način prikazan u čl.36., ali kad imamo nacrtan treći trag te ravnine i bokocrt toga pravca, onda to probodište možemo odrediti na kraći način ovako: Točka A mora imati svoj bokocrt A''' u trećem tragu t_3 te ravnine, jer je ravnina T treća projicirajuća ravnina, a kako je točka A i na pravcu a, mora njezin bokocrt A''' biti i na bokocrtu a''' pravca a, pa prema tome, mora biti točka A''' u presjecištu pravaca t_3 i a'''. Nacrt A'' toga probodišta odredimo zatim na nacrtu a'' pravca a pomoću ordinale povučene bokocrtom A''' okomito na os z; a njegov tlocrt A' nadjemo na tlocrtu a' pravca, a pomoću ordinale povučene točkom A'' okomito na os x.

Kad promatramo ravninu T i pravac a odozgo, ili odsprijeda, ne vidimo onaj dio pravca, koji je nalijevo od probodišta A, jer ga ravnina sakriva, pa je zbog toga tlocrt i nacrt toga dijela pravca nacrtan isprekidanom crtom. Kad pak ravninu T i pravac a promatramo u smjeru projiciranja na ravninu Π_3, vidimo čitav pravac, jer nam se ravnina T prikaže kao pravac t_3, pa je zbog toga čitav bokocrt pravca a nacrtan punom crtom.

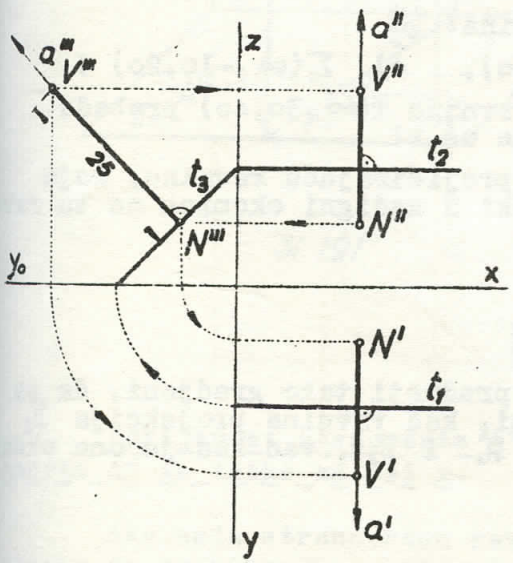


Sl. 189.

D.- Dužina okomite na trećoj projicirajućoj ravnini. Zadani su tragovi t_1, t_2 i t_3 treće projicirajuće ravnine T i projekcije točke N, koja je u toj ravnini; uzdigni u točki N okomicu na ravninu N , ako je ta okomica duga 25 mm! / sl.190./.

Kad je pravac okomit na nekoj ravnini E, on je okomit i na sutražnici o trećega traga te ravnine, koja ide probodištem ravnine E s pravcem a. Budući da je sutražnica o usporedna s ravninom Π_3 , to će se pravi kut, što ga čine pravac a i sutražnica o, projicirati na Π_3 kao pravi kut / čl.42./, t.j. $\sphericalangle a'''o'''$ bit će pravi kut. Kako je pak projekcija sutražnice o na ravninu Π_3 usporedna s tragom a_3 ravnine E , bit će $\sphericalangle a'''$ e_3 pravi kut. Prema tome možemo pravilo iz člana 43. proširiti ovako:

kad je pravac okomit na nekoj ravnini, njegov je tlocrt okomit na prvom tragu, njegov je nacrt okomit na drugom tragu, a njegov je bokocrt okomit na trećem tragu te ravnine.



Sl. 190

Prema tom pravilu mi ćemo iz točke N' povući okomicu a' na prvi trag t_1, zatim ćemo iz N'' povući okomicu a'' na drugi trag t_2, i na kraju ćemo iz N''' povući okomicu a''' na treći trag t_3, pa ćemo dobiti projekcije okomice a uzdignute na ravninu T u točki N.

Projekcije točke V, koja je na pravcu a, te je od točke N udaljena 25 mm, mogli bismo odrediti na način prikazan u čl. 21., ali budući da je ravnina T okomita na ravnini Π_3 , to je pravac a, koji je okomit na ravnini T, ujedno usporedan s Π_3 , pa će se dužina NV=25 mm, koja je na tom pravcu projicirati na Π_3 u pravoj veličini.

Ako prema tome učinimo $N'''V'''$= 25 mm, dobili smo bokocrt tražene okomice. Iz bokocrta V''' nađemo pomoću ordinale, povučene točkom V''' okomito na os z, njezin nacrt V'' na pravcu a'', a bokocrtom i nacrtom točke V odredjen je i njezin tlocrt V' .

6o. Vježbe.- 1. Nacrtaj sve tri projekcije ovih dužina:

a) AB [A(1o,1o,1o) , B(4o,3o,4o)] ,
b) CD [C(2o,2o,1o) , D(2o,2o,4o)] ,
c) EF [E(2o,1o,2o) , F(2o,4o,2o)] ,
d) GH [G(2o,15,2o) , H(5o,15,2o)] ,
e) IJ [I(1o,3o,2o) , J(4o,1o,2o)] ,
f) KL [K(1o,15,4o) , L(4o,15,1o)] ,
g) MN [M(15,1o,4o) , N(15,3o,1o)] !

2. Nacrtaj sve tri projekcije, sva tri probodišta i sva tri priklona kuta ovih pravaca:

a) AB [A(-1o,2o,1o), B(2o,1o,3o)] ,
b) CD [C(2o,3o,35) , D(5o,4o,6o)] ,
c) EF [E(2o,2o,3o) , F(5o,4o,5o)] !

3. Zadana je točka A(2o,4o,5o); nacrtaj sve projekcije okomice spuštene s točke A na os x, a zatim odredi projekcije točaka B i C, koje su na toj okomici, ako je ordinata točke B y = 3o, a aplikata točke C z = 2o!

4. Nacrtaj sva tri traga ovih ravnina:

a) Γ(3o,2o,-4o), b) Δ(3o,-1o,3o) , c) Σ(3o,-4o,2o) !

5. Nacrtaj sva tri traga ovih ravnina, ako Π_3 preložiš na Π_2 oko osi z nadesno:

a) Γ(-3o,3o,2o) , b) Δ(-35,-4o,2o), c) Σ(-2o,4o,-15) !

6. Nacrtaj sve tri projekcije sutražnice trećega traga ovih ravnina:

a) Γ(4o,5o,5o), b) Δ(3o,-6o,3o), c) Σ(3o,-15,3o) !

7. Nacrtaj sve tri projekcije priklonice trećega traga i treći prikloni kut ovih ravnina:

a) Γ(35,2o,-35), b) Δ(-4o,3o,35), c) Σ(-25,4o,-15) !

8. U ravnini T(∞,3o,5o) nalazi se trokut ABC, kojemu je zadan nacrt A" (1o,y,1o), B"(5o,y,2o), C" (3o,y,4o) ; nacrtaj njegov tlocrt i bokocrt!

9. U ravnini T(∞,5o,4o) nalazi se trokut ABC, kojemu je zadan tlocrt A' (1o,2oz), B'(3o,4o,z), C'(5o,1o,z) ; nacrtaj njegov nacrt i bokocrt!

1o. Nacrtaj sva tri traga ovih ravnina:

a) Γ(∞,2o,3o), b) Δ(∞,15,-3o), c) Σ(∞,-1o,2o) !

11. Nadji projekcije točke u kojoj ravninu T(∞,3o,4o) probada pravac povučen točkom A(2o,4o,5o) okomito na os x!

12. Točkom N(3o,15,2o) položi treću projicirajuću ravninu, koja s ravninom Π_4 čini kut od 6o°, zatim u točki N uzdigni okomicu na tu ravninu, ako je ta okomica duga 3o mm.

§ 8. STRANOCRT

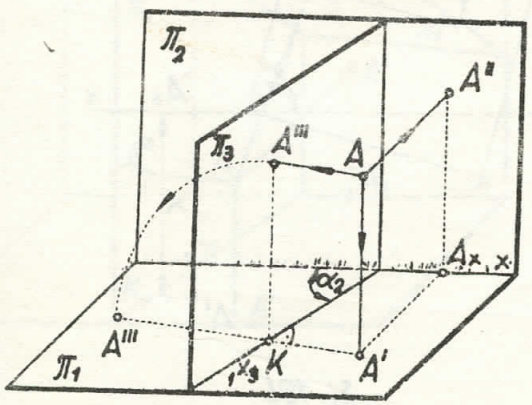
61. O stranocrtu. Neki su tehnički predmeti tako gradjeni, da se njihova treća projekcija može lakše nacrtati, kad ravnina projekcija Π_3 nije okomita na obim ravninama projekcija Π_4 i Π_2, već kad je ona okomi

samo na Π_1 , ili samo na Π_2 . Takva se ravnina projekcija Π_3 , koja ne stoji s boka predmeta, već sa strane, zove stranocrtna ravnina, a normalna projekcija predmeta na toj ravnini zove se stranocrt toga predmeta ili njegova treća projekcija. Isto tako ima teoretskih zadataka, koji se mogu lakše riješiti, ako se ravninama projekcija Π_1 i Π_2 doda još i ravnina projekcija Π_3 , koja je okomita samo na jednoj od njih, a k tome ona ima neki osobiti položaj prema nekom odredbenom elementu zadatka.

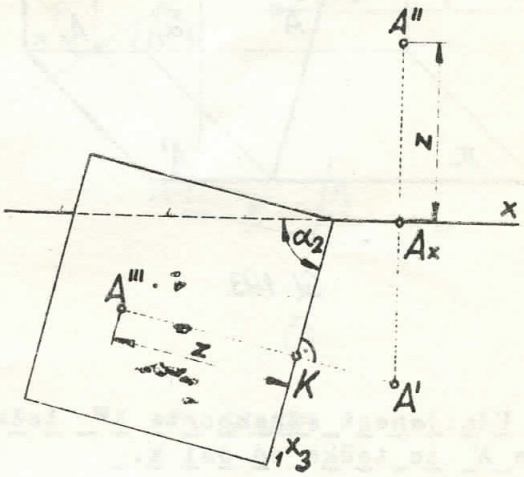
Kad ravninama projekcija Π_1 i Π_2 dodamo još i stranocrtnu ravninu Π_3 , pa pomoću nje riješimo na jednostavniji način neki praktični, ili teoretski zadatak, onda kažemo, da smo taj zadatak riješili pomoću stranocrta, ili transformacijom ravnina projekcija.

62. Stranocrt točke

A.- Stranocrtna ravnina Π_3 okomita je samo na ravnini Π_1. Slikom 191. prikazane su ravnine projekcija Π_1 i Π_2 , točka A u prostoru, te njezin tlocrt A' i nacrt A" . Ravninama Π_1 i Π_2 dodana je još i ravnina projekcija Π_3 , koja je okomita na Π_1 , a čini s Π_2 kut α_2 . Ona siječe ravninu Π_1 u pravcu, koji je označen s $_1x_3$. Ako se iz točke A postavi okomica na ravninu Π_3 i odredi njezino nožište A''' na Π_3 , onda je točka A''' stranocrt ili treća projekcija točke A na ravnini Π_3 , koja je okomita samo na Π_1 . Ravnina, koju čine okomice AA' i AA''' postavljene iz točke A na Π_1 i na Π_3 , okomita je na osi $_1x_3$, u kojoj se te dvije ravnine sijeku. Ako ta ravnina siječe os $_1x_3$ u točki K, onda su dužine $A'K$ i $A'''K$ okomite na toj osi. Iz pravokutnika $AA'KA'''$ i $AA'A_xA''$ izlazi, da je $KA''' = A'A = A_xA''$, ili: $KA''' = A_xA''$.



Sl. 191.



Sl. 192.

Udaljenost stranocrta A''' točke A od osi $_1x_3$ jednaka je udaljenosti nacrta A'' te točke od osi x.

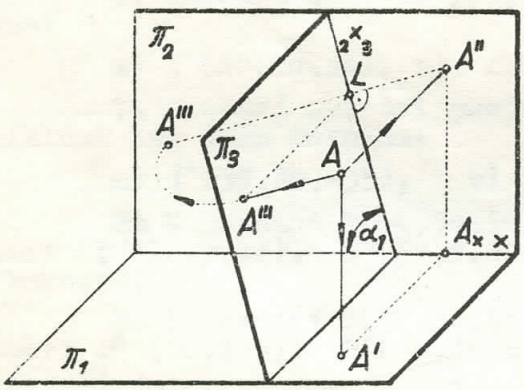
Ako sada stranocrtnu ravninu Π_3 preložimo oko osi $_1x_3$ put lijeve strane na ravninu Π_1 , onda točka A''' iz ravnine Π_3 opiše u smjeru strelice četvrtinu kružnice, kojoj je točka K središte, i padne na Π_1 u točku A''' , koja je s točkom A' na ordinali položenoj iz A' okomito na os $_1x_3$. Tako smo dobili nove pridružene projekcije A' i A''' točke A, kao što su prije bile pridružene projekcije A' i A'' te točke.

Na slici 192. riješen je ovaj zadatak:

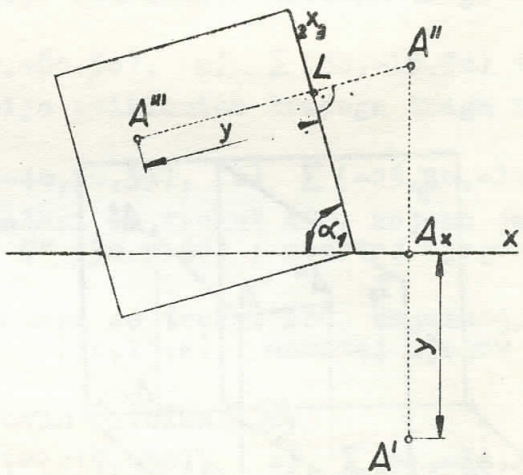
Zadan je tlocrt A' i nacrt A'' točke A; neka se nacrta stranocrt te točke, ako je stranocrtna ravnina okomita na ravnini Π_1, a čini s ravninom Π_2 kut α_2.

Iz tlocrta A' točke A povuče se okomica na novu os $_1x_3$, koja čini s osi x kut α_2. Na toj okomici mora biti stranocrt A''', koji se dobije tako, da se učini $KA''' = A_xA'' = z$.

B.- Stranocrtna ravnina Π_3 okomita je samo na ravnini Π_2. Na slici 193. nacrtane su ravnine projekcija Π_1 i Π_2, te točka A sa svojim projekcijama A' i A''. Pored toga dodana je ravnina Π_3, koja je okomita na ravnini Π_2, a čini s ravninom Π_1 kut α_1. Pravac, u kojemu se sijeku ravnine Π_2 i Π_3, označen je s $_2x_3$. Nožište okomice spuštene iz točke A na ravninu Π_3 jest stranocrt ili treća projekcija A''' točke A na ravnini Π_3, koja je okomita samo na Π_2. Ravnina, koju čine okomice AA'' i AA''' postavljene iz točke A na Π_2 i ne Π_3, okomita je na os $_2x_3$, u kojoj se te dvije ravnine sijeku. Ako ta ravnina siječe os $_2x_3$ u točki L, onda su dužine A''L i A'''L okomite na toj osi. Iz pravokutnika AA''^3LA''' i $AA'A_xA''$ izlazi, da je $LA''' = A''A = A_xA'$, ili $LA''' = A_xA'$



Sl. 193.



Sl. 194.

Udaljenost stranocrta A''' točke A od osi $_2x_3$ jednaka je udaljenosti tlocrta A' te točke od osi x.

Ako sada stranocrtnu ravninu Π_3 preložimo oko osi $_2x_3$ put lijeve strane na ravninu Π_2, onda točka A''' iz ravnine Π_3 opiše u smjeru strelice četvrtinu kružnice, kojoj je točka L središte, i padne na Π_2 u točku A''', koja je s točkom A'' na onoj ordinali, koja ide iz A'' okomito na os $_2x_3$.

Na slici 194. riješen je ovaj zadatak:

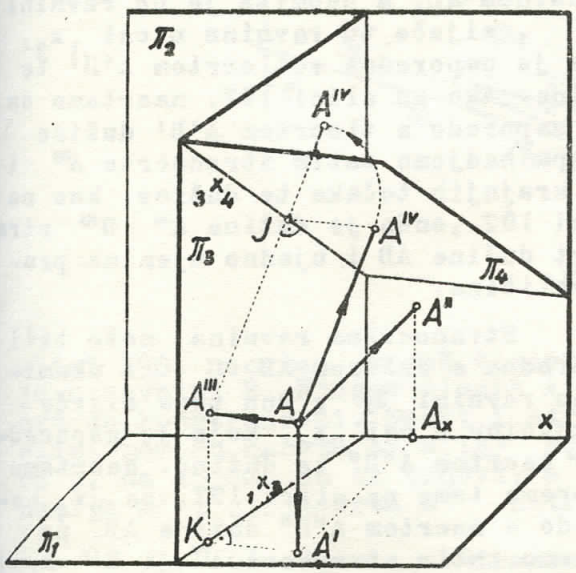
Zadan je tlocrt A' i nacrt A'' točke A; treba nacrtati stranocrt te točke, ako je stranocrtna ravnina okomita na ravnini Π_1 a čini s ravninom Π_1 kut α_1.

Iz nacrta A" točke A povuče se okomica na novu os $_2x_3$, koja čini s osi x kut α_1 , pa se učini $LA''' = A_xA' = y$.

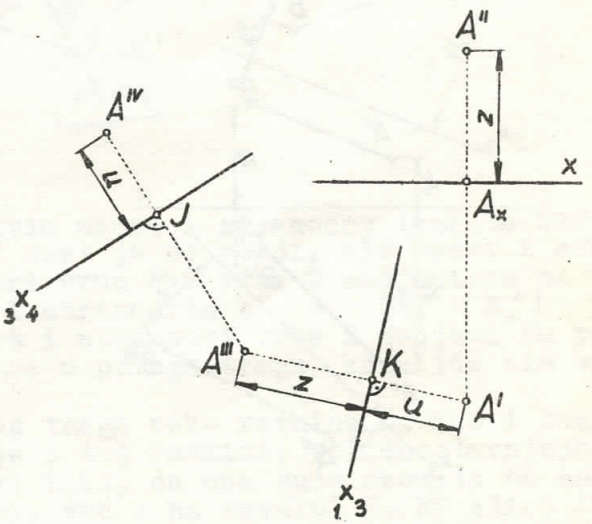
Na slici 192., kao i na slici 194., bila je preložena stranocrtna ravnina omedjena pravokutnikom, kojemu je jedna stranica bila na osi $_1x_3$, odnosno $_2x_3$. Ubuduće ispuštat ćemo to omedjivanje preložene stranocrtne ravnine, jer je njezin preložaj odredjen s osi $_1x_3$, odnosno $_2x_3$.

C.- Stranocrtna ravnina π_4, okomita je na stranocrtnoj ravnini π_3.

Slikom 195.- prikazane su ravnine projekcija π_1 i π_2 , točka A u prostoru, te njezin tlocrt A' i nacrt A". Zatim je prikazana stranocrtna ravnina π_3 , koja je okomita samo na ravnini π_1 , i stranocrt A''' točke A na toj ravnini. Na kraju je tom slikom prikazana još i stranocrtna ravnina π_4 , koja je okomita samo na ravnini π_3 , a siječe je u osi $_3x_4$. Nožište okomice spuštene iz točke A na ravninu π_4 jest stranocrt A^{IV} ; ili četvrta projekcija točke A. Ravnina odredjena okomicama AA''' i AA^{IV} , koje su postavljene iz iz točke A na π_3 i na π_4 , okomita je na osi $_3x_4$, pa su zbog toga dužine $A'''J$ i $A^{IV}J$ okomite na toj osi. Iz pravokutnika $AA'''JA^{IV}$ i $AA'''KA'$ izlazi, da je $JA^{IV} = A'''A = KA'$, ili $JA^{IV} = KA'$.



Sl. 195.



Sl. 196.

Udaljenost stranocrta A^{IV} od osi $_3x_4$ jednaka je udaljenosti tlocrta A' te točke od osi $_1x_3$.

Ako sada stranocrtnu ravninu π_4 preložimo oko osi $_3x_4$ prema gore na ravninu π_3 , onda točka A^{IV} iz ravnine π_4 opiše u smjeru strelice četvrtinu kružnice, kojoj je središte točka J i padne na π_3 u točku A^{IV} , koja je s točkom A''' na ordinali, koja ide iz A''' okomito na os $_3x_4$. Na kraju ravninu π_3 skupa s točkama A''' i A^{IV} preložimo oko osi $_1x_3$ put lijeve strane na

ravninu π_4 , kao na sl.191.

Na slici 196. riješen je ovaj zadatak:

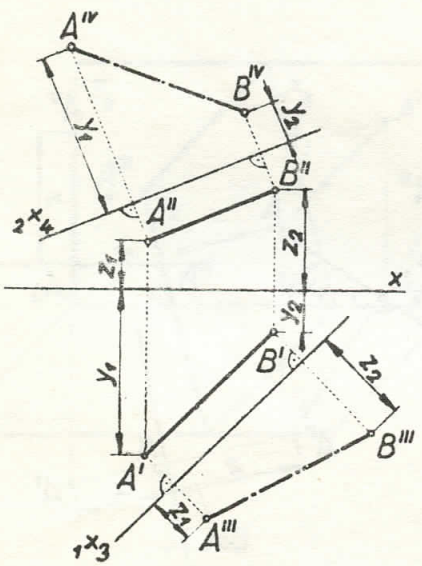
Zadan je tlocrt A' i nacrt A'' točke A, te osi $_1x_3$ i $_3x_4$; treba nacrtati stranocrte A''' i A'''' te točke!

Nacrta se najprije stranocrt A''' te točke, kao na sl.192., a zatim se iz točke A''' postavi okomica na os $_3x_4$, pa se na njoj nadje točka A'''' tako da bude JA'''' = A' K = u.

63. Stranocrt dužine. Ako su točke A i B krajnje točke neke dužine, njezin se stranocrt odredi tako, da se nadju stranocrti A''' i B''' točaka A i B, pa se oni spoje dužinom A''' B''' .

Pomoću stranocrta možemo odrediti pravu veličinu neke dužine AB, ako su zadane njezine projekcije A'B' i A''B'', i to na dva načina / sl.197./.

Znademo otprije / čl.14. i 15./, da će normalna projekcija neke dužine biti usporedna s tom dužinom i njoj jednaka, ako ravnina projekcija bude usporedna s tom dužinom. Prema tome će stranocrt neke dužine biti jednak toj dužini, ako stranocrtna ravnina bude usporedna s tom dužinom.



Sl. 197.

Stranocrtna ravnina, koja je usporedna s dužinom AB, a okomita je na ravnini π_4 , siječe tu ravninu u osi $_1x_3$, koja je usporedna s tlocrtom A'B' te dužine. Ako na slici 197. nacrtamo os $_1x_3$ usporedo s tlocrtom A'B' dužine AB, pa nadjemo zatim stranocrte A''' i B''' krajnjih točaka te dužine, kao na slici 192., onda je dužina A''' B''' stranocrt dužine AB i ujedno njezina prava veličina.

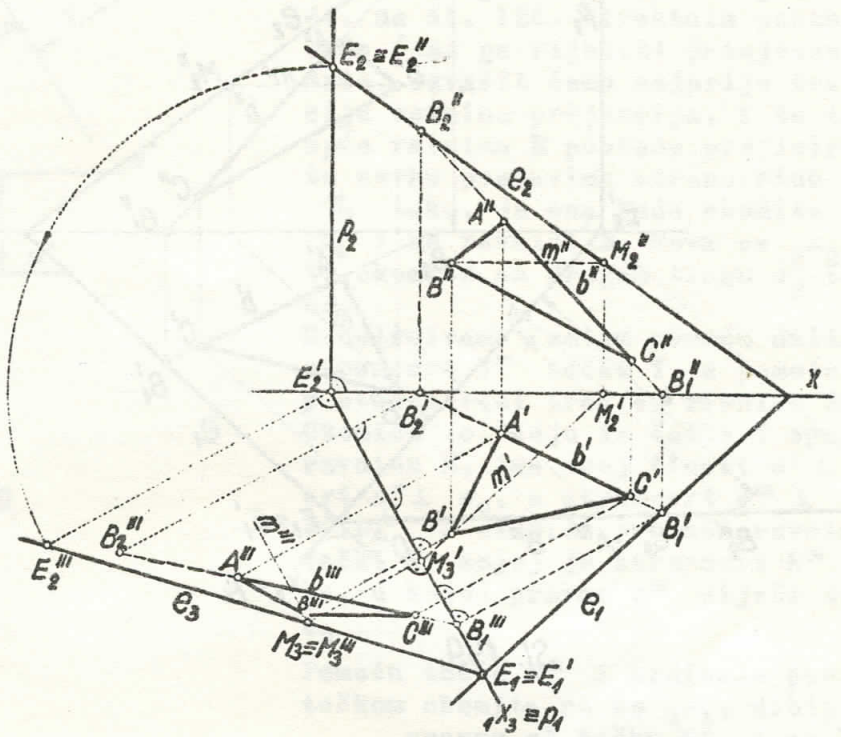
Stranocrtna ravnina može biti usporedna s dužinom AB, i okomita na ravnini π_2 . Ona tada siječe tu ravninu u osi $_2x_4$, koja je usporedna s nacrtom A''B'' te dužine. Nacrtamo li prema tome na slici 197. os $_2x_4$ usporedo s nacrtom A''B'' dužine AB, pa nadjemo zatim stranocrt A'''' i B'''' krajnjih točaka te dužine, kao na slici 194., onda je dužina A'''' B'''' stranocrt dužine AB i ujedno njezina prava veličina.

Kad se konstrukcije stranocrta A'''B''' i A''''B'''' dužine AB točno izvedu, mora dužina A''' B''' biti jednaka dužini A'''' B'''' .

64. Stranocrt ravnine

A.- Pravac, u kojemu neka ravnina E siječe stranocrtnu ravninu π_3 , zove se stranocrtni trag te ravnine, a označuje se, kao i njezin treći trag, slovom e_3. Na slici 198. zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E i tragovi p_1 i p_2 stranocrtne ravnine π_3 , koja je okomita na π_4 . Njezin prvi trag p_1 poklapa se s osi $_1x_3$, a njezin drugi trag p_2 okomit je na osi x. Stranocrtni trag e_3 ravnine E, koji je presječnica p ravnina E i π_3 , odredjen je svojim prvim probodištem $E_1 = (e_1\ p_1)$ i svojim drugim probodištem

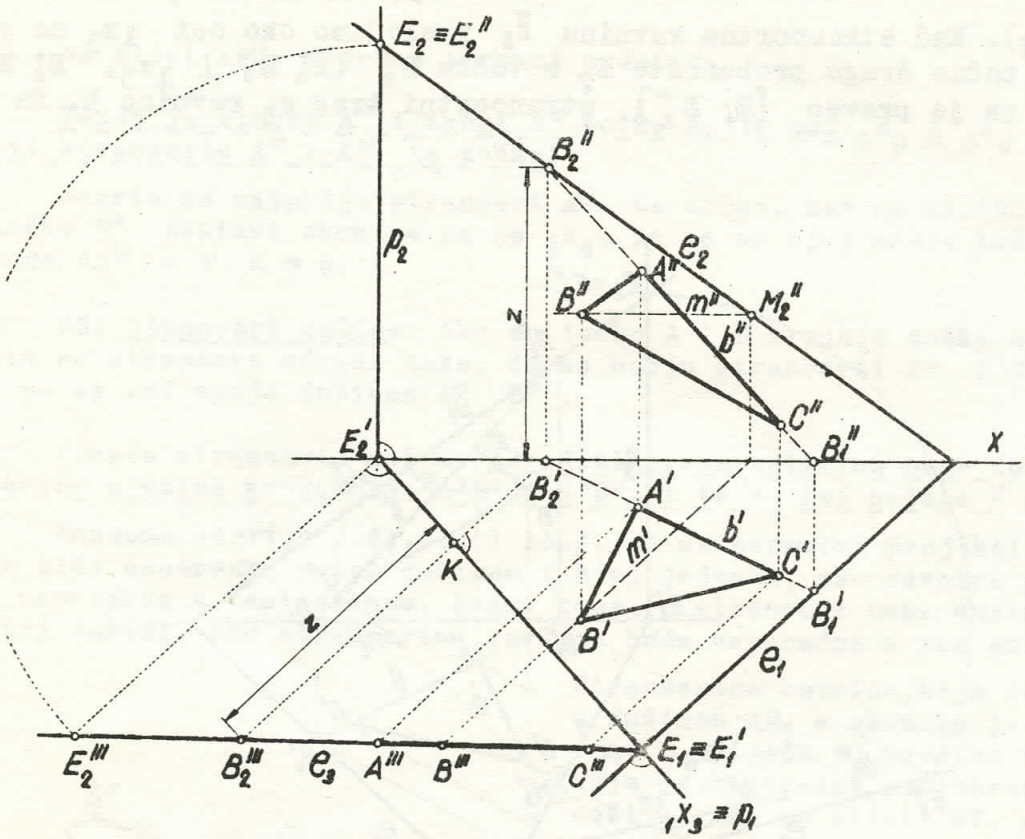
$E_2 = (e_2\ p_2)$. Kad stranocrtnu ravninu Π_3 preložimo oko osi $_1x_3$ na ravninu Π_1, tada padne drugo probodište E_2 u točku E_2''' ($E_2' E_2''' \perp {}_1x_3$, $E_2' E_2''' = E_1' E_2''$), pa je pravac $[E_1' E_2''']$ stranocrtni trag e_3 ravnine E. Na



Sl. 198.

slici 198. nacrtan je još tlocrt, zatim nacrt i stranocrt trokuta ABC, koji je u ravnini E. Njegov tlocrt A'B'C' uzet je po volji, ali nacrt i stranocrt su konstruirani. Nacrt i stranocrt vrha A i vrha C nadjeni su na toj slici pomoću nacrta $b'' = [B_1''\ B_2'']$ i stranocrta $b''' = [B_1'''\ B_2''']$ pravca b, na kojemu su ti vrhovi, a nacrt i stranocrt vrha B nadjeni su pomoću nacrta m" i stranocrta m''' sutražnice m prvoga traga, koja ide tim vrhom.

B.– Odredjivanje stranocrtnog traga neke ravnine E, kao i konstruiranje stranocrta nekog lika, koji je u toj ravnini, pojednostavnjuje se, kad se stranocrtna ravnina Π_3 postavi tako, da ona bude okomita ne samo na jednoj od dviju ravnina projekcija, već i na ravnini E. Na slici 199. nacrtani su tragovi e_1 i e_2 iste ravnine E i projekcije A'B'C' i A"B"C" istog trokuta ABC kao i na slici 198., samo je os $_1x_3$ sada okomita na tragu e_1. Stranocrtna ravnina Π_3, kojoj je prvi trag $p_1 \equiv {}_1x_3$, okomita je sada ne samo na ravnini Π_1 već i na ravnini E, jer je okomita na pravcu e_1 te ravnine. Time je ravnina E postala s obzirom na stranocrtnu ravninu Π_3 projicirajuća ravnina. Njezin treći trag e_3 može se konstruirati pomoću točke E_2''', koju nadjemo na isti način kako smo je našli na slici 198. ($E_2' E_2''' \perp {}_1x_3$, $E_2' E_2''' = E_2' E_2''$), a u trećem tragu te ravnine nalazit će se stranocrti svih točaka, dužina i likova, koji su u toj ravnini (čl.59.). Prema tome je i stranocrt A''' B''' C''' trokuta ABC u trećem tragu e_3 ravnine E. Kad drugi trag p_2 stranocrtne ravnine Π_3 pada izvan medje crteža, a Π_3 je okomita i na ravnini E, možemo u tom slučaju odrediti treći trag e_3 ravnine



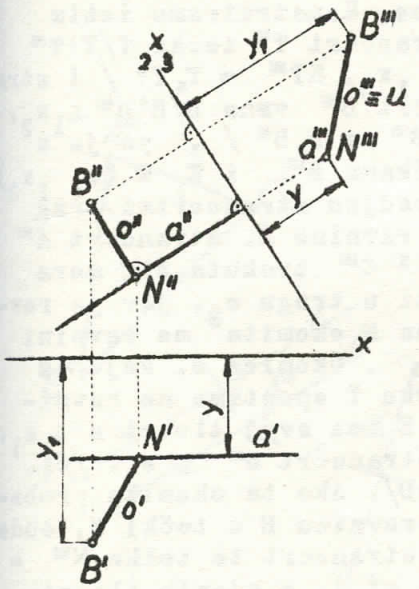
Sl. 199.

E tako, da nadjemo stranocrt koje god točke te ravnine, jer stranocrti svih točaka ravnine E moraju biti u trećem tragu e_3. Odaberemo zbog toga koju god točku drugoga traga e_2 te ravnine, na pr. B_2, kojoj su projekcije B_2' i B_2'', i nadjemo njezin stranocrt B_2''' / $B_2' B_2''' \perp {}_1x_3$, K $B_2''' = B_2' B_2'' = z$ /, pa je s točkom B_2''' i točkom $E_1 = (e_1\ {}_1x_3)$ određen treći trag e_3 ravnine E.

St. 65. Primjene stranocrta

A.- Zadane su projekcije a' i a'' pravca a, koji je usporedan s Π_2 , i projekcije točke B; treba odrediti udaljenost te točke od pravca! / sl.200./

Ako iz točke B spustimo okomicu o na pravac a, i označimo slovom N njezino nožište na tom pravcu, onda je dužina BN jednaka udaljenosti točke B od pravca a. Pravi kut što ga zatvaraju pravac a i okomica o, projicirat će se na ravninu Π_2 u pravoj veličini, jer je njegov krak a usporedan s Π_2 /čl.42./. Spustimo li prema tome iz točke B'' okomicu o'' na pravac a'', dobit ćemo na a'' točku N''= /a'' o''/, a pomoću ordinale spuštene tom točkom nadjemo na pravcu a' točku N'. Pravu veličinu dužine BN nadjemo zatim pomoću stranocrta, kao na sl.197. Postavimo stranocrtnu ravninu Π_3 okomito na ravninu Π_2 , ali usporedo s dužinom BN. Nova os ${}_2x_3$ mora biti usporedna s B''N''. Odredimo na kraju stranocrt B''' N''' te dužine, pa je dužina B''' N''' jednaka udaljenosti točke B od pravca a.



Sl. 200.

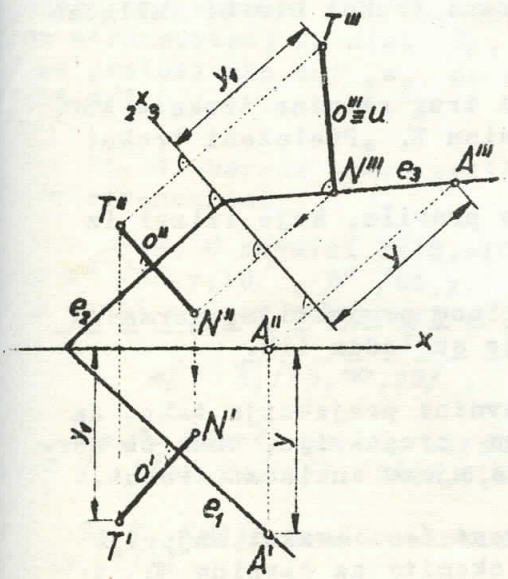
B.- Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E i projekcije T' i T'' točke T; treba odrediti udaljenost te točke od ravnine! / sl.201./

Taj smo zadatak riješili u čl. 44. na sl. 126. direktnim postupkom, a sada ćemo ga riješiti primjenom stranocrta. Izvršit ćemo najprije transformaciju ravnina projekcija, i to tako, da opća ravnina E postane projicirajuća. U tu svrhu postavimo stranocrtnu ravninu Π_3 tako, da ona bude okomita na ravnini Π_2 i na ravnini E. Nova os $_2x_3$ mora biti okomita na drugom tragu e_2 te ravnine.

Konstruiramo zatim pomoću dužine y_1 stranocrt T''' točke T, a pomoću dužine y stranocrtni trag e_3 ravnine E.

Okomica o, koju iz točke T spustimo na ravninu E, ima svoj tlocrt $o' \perp e_1$, nacrt $o'' \perp e_2$, a stranocrt $o''' \perp e_3$ /čl. 59.b/. Ta okomica probada ravninu E u točki N, kojoj je stranocrt N''' ona točka, u kojoj pravac o''' siječe treći trag e_3.

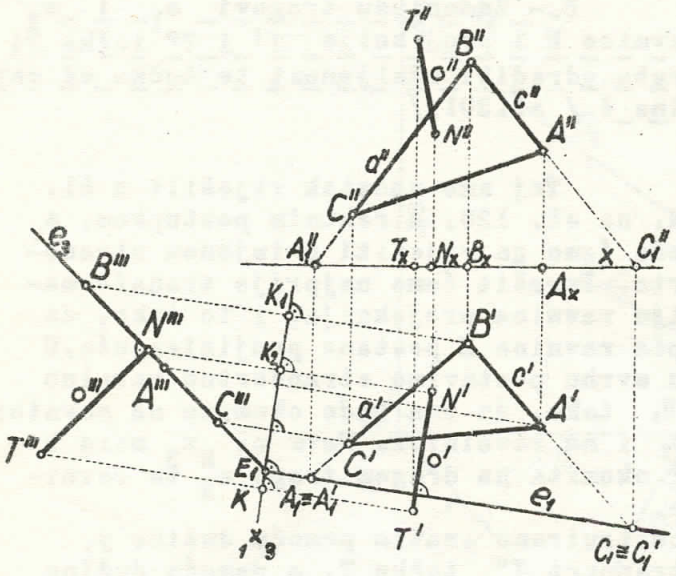
Pomoću točke N''' i ordinale povučene tom točkom okomito na os $_2x_3$, dobijemo na pravcu o'' točku N'', a na kraju pomoću ordinale povučene točkom N'' okomito na os x dobijemo na pravcu o' točku N'. Budući da je dužina TN usporedna sa stranocrtnom ravninom Π_3, ona se na tu ravninu projicira u pravoj veličini, pa je zbog toga dužina T''' N''' jednaka udaljenosti točke T od ravnine E.



Sl. 201.

C.- Zadane su projekcije trokuta ABC i točke T; odredi udaljenost te točke od ravnine trokuta! / sl.202./

Da bismo dobili prvi trag e_1 ravnine E toga trokuta, produžimo njegove stranice $a = [BC]$ i $c = [AB]$, pa odredimo njihova prva probodišta A_1 i C_1. Pravac $e_1 = [A_1 C_1]$ je taj prvi trag ravnine E. Sada pomoću stranocrtne ravnine Π_3, koju postavimo okomito na ravninu Π_1 i na ravninu E, transformirajmo opću ravninu E u projicirajuću.



Sl. 202

Nova os $_1x_3$ mora biti okomita na prvom tragu e_1 te ravnine. Konstruiramo zatim stranocrt T''' točke $T/T'T'''$ $\perp {}_1x_3$, $KT''' = T_xT''$ / i stranocrt B''' vrha $B/B'B''' \perp {}_1x_3$, $K_1B''' = B_xB''$ / , pa je s točkama B''' i $E_1 = (e_1\ {}_1x_3)$ određen stranocrtni trag e_3 ravnine E. Stranocrt A''' B''' i C''' trokuta ABC mora biti u tragu e_3, jer je ravnina E okomita na ravnini π_3 . Okomica o, koju iz točke T spustimo na ravninu E ima svoj tlocrt $o' \perp e_1$, a stranocrt $o''' \perp e_3$. /čl. 59.D/. Ako ta okomica probada ravninu E u točki N, onda je stranocrt te točke $N''' = (e_3\ o''')$, a njezin tlocrt N' je u sjecištu pravca o' i ordinale povučene točkom N''' okomito na os $_1x_3$, dok njezin nacrt N'' nađemo pomoću njezinog tlocrta N' i stranocrta N''' / $N'N'' \perp x$, $N_xN'' = K_2N'''$ /. Pravac $o'' = /\ T''N''\ /$ je nacrt okomice spuštene iz točke T na ravninu E. Kako je dužina TN usporedna sa stranocrtnom ravninom π_3 , njezin stranocrt $T'''N'''$ jednak je udaljenosti točke T od ravnine E.

D.- Zadane su projekcije trokuta ABC, koji je u općem položaju odredi njegovu pravu veličinu ! / sl.203./

Taj bismo zadatak mogli riješiti ovako: Odredili bismo prave veličine stranica zadanog trokuta / čl.17./, pa bismo s tim pravim veličinama njegovih stranica konstruirali trokut. Konstruirani trokut bio bi sukladan s zadanim trokutom.

Ili bismo kao na slici 202. odredili prvi trag ravnine trokuta ABC, pa taj trokut preložili oko prvoga traga na ravninu π_1 .Preloženi trokut bio bi sukladan sa zadanim trokutom.

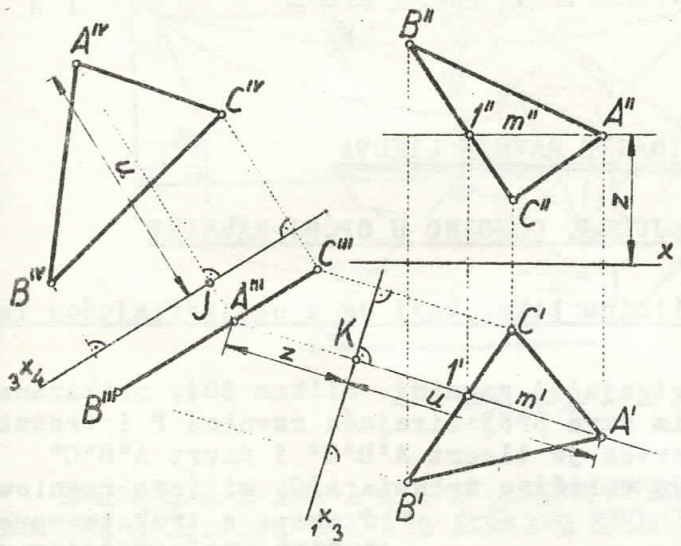
Treće rješenje toga zadatka osniva se na pravilu, koje izlazi iz pravila navedenih u čl.29.C i D, a koje glasi:

Kad je ravnina mnogokuta usporedna s ravninom projekcija, normalna projekcija toga mnogokuta na toj ravnini njemu je sukladan lik.

Ako prema tome izvedemo transformaciju ravnina projekcija tako, da zadani trokut postane usporedan s jednom ravninom projekcija, onda će normalna projekcija toga trokuta na toj ravnini biti njemu sukladan trokut.

Tu transformaciju ravnina projekcija izvest ćemo ovako: Najprije pomoću stranocrtne ravnine π_3 , koju postavimo okomito na ravninu π_1 i na ravninu trokuta, transformiramo ravninu toga trokuta u projicirajuću. Nova os $_1x_2$ mora, prema slici 202., biti okomita na prvom tragu e_1 ravnine trokuta. Da ne moramo odrediti taj prvi trag e_1, nacrtamo na slici 203. projekcije m' i m'' sutražnice prvoga traga m, koja prolazi točkom A; pa nova

$_1x_3$ mora biti okomita na m'. Konstruiramo zatim stranocrt $A^{III}B^{III}C^{III}$ trokuta ABC pomoću stranocrta njegovih vrhova / čl.62.A/.



Sl. 203.

Sada postavimo novu stranocrtnu ravninu Π_4 tako /čl.62./, da ona bude okomita na stranocrtnoj ravnini Π_3, a usporedna s trokutom. Nova os $_3x_4$ mora prema tome biti usporedna s stranocrtom $A^{III}B^{III}C^{III}$ zadanog trokuta. Ako na kraju konstruiramo stranocrt $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ trokuta ABC na stranocrtnoj ravnini Π_4 pomoću stranocrta njegovih vrhova / čl.62.C/, bit će trokut $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ sukladan sa zadanim trokutom ABC, jer je stranocrtna ravnina Π_4 usporedna s tim trokutom.

66. Vježbe. 1. Zadane su točke A/30,10,20/ , B/45,-15,30/ , C/75, ,-20/, D/85,5,-25/ i stranocrtna ravnina Π_3/10,-15,∞/ ; odredi stranotih točaka!

2. Zadane su točke A/40,20,10/ , B/30,-25,15/ , C/20,-30,-20/ i 55,25,-15/ i stranocrtna ravnina Π_3/65,∞,70/; odredi stranocrte tih čka!

St.3. Odredi stranocrte točke A/5,25,10/ i točke B/15,30,-25/ na ranocrtnoj ravnini Π_3/15,-25,∞/ , a zatim drugi stranocrt svake te točke na stranocrtnoj ravnini Π_4, koja je okomita na ravnini Π_3, ako os $_3x_4$, se preloži oko osi $_1x_3$ na ravninu Π_1, prolazi točkama C/55,0,0/ i 5,55,0/!

St. 4. Odredi pravu veličinu dužine AB/ A/10,5,10/ , B/30,20,20/ / pomoću stranocrta!

5. U ravnini E/15,-10,-15/ nalazi se trokut ABC, kojemu je zadan crt A^{II} /35,y,10/ , B^{II} /65,y,0/ , C^{II} /55,y,15/ ; odredi njegov tlocrt, a nadji njegov stranocrt na stranocrtnoj ravnini:

a/ Π_3/95,∞,55/ , b/ /80,∞,80/ !

St.6. Odredi pomoću stranocrta udaljenost točke T/30,30,30/ , od prav- ≡ / A/10,20,15/ , B/40,5,15/ /!

St.7. Nadji pomoću stranocrta udaljenost točke T/30,35,35/ od ravnine 55,30/ !

St.8. Odredi pomoću stranocrta udaljenost točke T/30,15,45/ od trokuta / A/20,25,15/ , B/50,20,15/ , C/35,45,35/ /!

St. 9. Nadji pomoću stranocrta pravu veličinu trokuta ABC / A/20,25, B/55,10,5/ , C/35,45,35/ / !

St. 10. Odredi pomoću stranocrta najkraću udaljenost dvaju mimoilaznih pravaca a [A/10,40,40/ , B/40,40,60/] i b [C/10,5,20/ , D/60, 50,10/] ! Uputa: Povuci os $_2x_3$ okomito na a"!

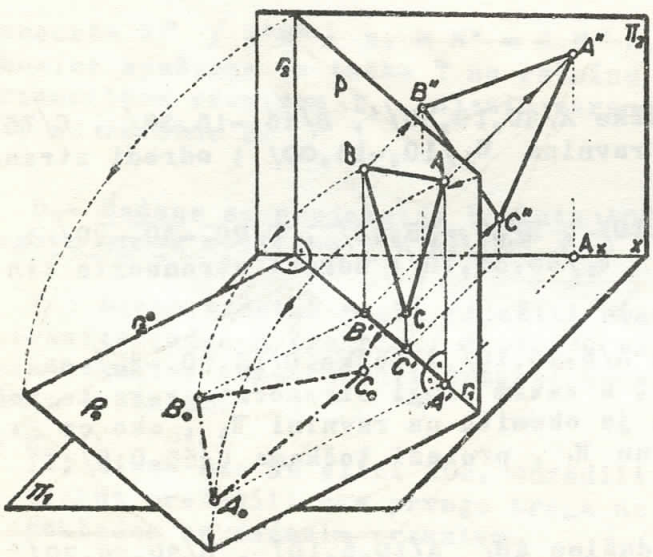
St. 11. Nadji pomoću stranocrta projekcije transverzale, koja se točkom T /60,10,60/ može povući na dva mimoilazna pravca a [A/20,20,40/, B/70,40,40/], i b [C/10,70,30/ , D/60,50,10/]! Uputa: Povuci os $_1x_3$ okomito na a"!

III. NORMALNO PROJICIRANJE RAVNIH LIKOVA

§9. RAVAN LIK U PROJICIRAJUĆOJ, ODNOSNO U OPĆOJ RAVNINI

67. Određivanje prave veličine lika, koji je u projicirajućoj ravnini

A.- Lik je u prvoj projicirajućoj ravnini. Slikom 204. prikazane su ravnine projekcija Π_1 i Π_2 , zatim prva projicirajuća ravnina P i trokut ABC, koji je na njoj. Pored toga nacrtan je tlocrt A'B'C' i nacrt A"B"C" toga trokuta. Da bismo odredili pravu veličinu trokuta ABC, mi ćemo ravninu P skupa s trokutom preložiti oko njezinog prvog traga r_1 na ravninu Π_1 i dobit ćemo trokut $A_0B_0C_0$, koji će biti prava veličina toga trokuta. Zrake projiciranja A A', B B' i CC' okomite su na tragu r_1 prije i poslije prelaganja, a u preloženju prikazat će se u pravoj veličini. Budući da je A'A = A_xA", mora biti $A'A_0 = A_xA$", a isto tako mora udaljenost točke B_0, odnosno C_0, od traga r_1 biti jednaka udaljenosti nacrta B", odnosno C" , od osi x.



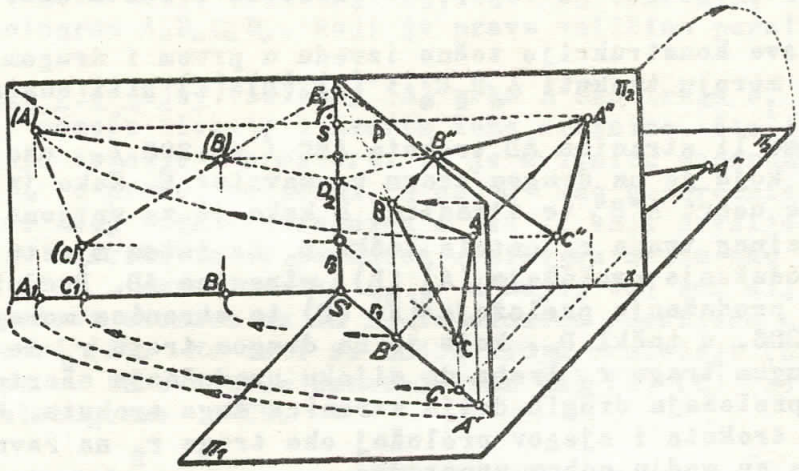
Sl. 204.

Pravu veličinu trokuta ABC možemo odrediti na još jedan način:

Ravninu P skupa s trokutom preložit ćemo oko njezinog drugoga traga r_2 na ravninu Π_2 /sl.205./. Trokut ABC doći će u položaj (A)(B)(C) , koji će biti prava veličina toga trokuta.

Za prelaganja ravnine P oko drugoga traga r_2 opisuje svaka njezina točka po jedan luk kružnice, koja je usporedna s ravninom Π_1 , a kojoj je središte u tragu r_2. Tako točka A opisuje luk A(A) kružnice, kojoj je središte S, a polumjer SA=S(A). Budući da je taj luk usporedan s Π_1 , on se projicira na Π_1 u pravoj veličini kao luk A' A_1 , kojemu je polumjer S'A' = SA, dok se taj luk projicira na Π_2 kao dužina A" (A), koja je usporedna s osi x.

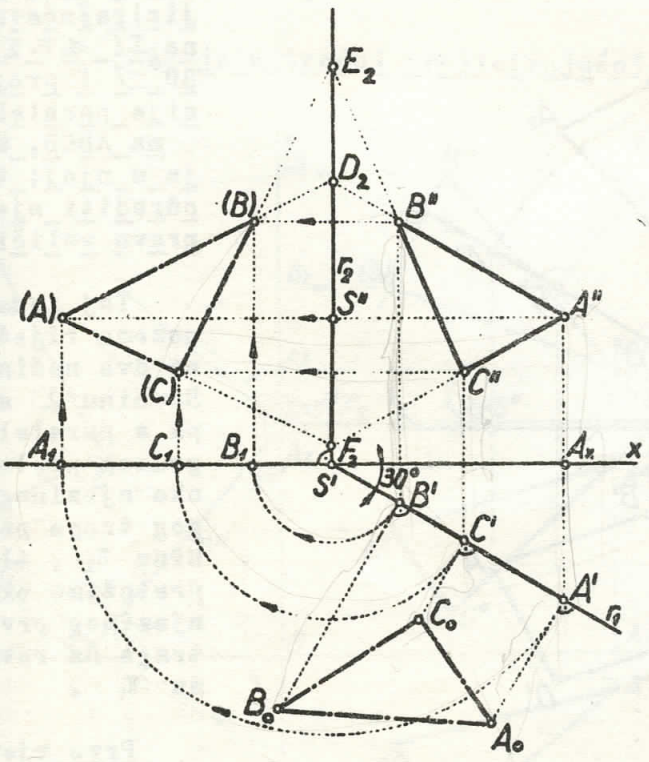
Na temelju tih objašnjenja riješit ćemo sada ovaj zadatak:



Sl. 205.

Zadani su tragovi r_1 i r_2 prve projicirajuće ravnine P, koja čini s Π_2 kut od 30°, i projekcije trokuta ABC, koji je u njoj; neka se odredi prava veličina toga trokuta!

Prvo rješenje toga zadatka izvest ćemo pomoću prelaganja ravnine P oko prvoga traga r_1 na ravninu Π_1. Preložaj A_o (sl.206.) vrha A nadje se tako, da se u tlocrtu A' postavi okomica na trag r_1 i učini $A'A_o = A_xA''$. Na isti se način nadju preložaji B_o i C_o vrhova B i C, a zatim se točke A_o, B_o i C_o medju sobom spoje, pa se dobije trokut $A_oB_oC_o$ koji je prava veličina trokuta ABC.



Sl. 206.

Drugo rješenje toga zadatka izvest ćemo pomoću prelaganja ravnine P oko drugoga traga na ravninu Π_2. Preložaj (A) (sl.206.) vrha A nadje se pomoću tlocrta i nacrta luka kružnice, što je točka A za vrijeme toga prelaganja opisuje u prostoru. Ta je kružnica usporedna s ravninom Π_1, pa se projicira na Π_1 u pravoj veličini, a na Π_2 kao usporednica s osi x. Oko S' opiše se zbog toga luk kružnice s polumjerom S'A' i označi se točka A_1, u kojoj taj luk siječe os x. Točkom A'' povuče se zatim usporednica s osi x, a u točki A_1 uzdigne okomica na os x.

U sjecištu te usporednice i te okomice nalazi se točka (A). Na isti se način nadju preložaji (B) i (C) vrhova B i C, pa kad se oni medju sobom spoje, dobije se trokut (A) (B) (C), koji je prava veličina trokuta ABC.

Ako se sve konstrukcije točno izvedu u prvom i drugom rješenju toga zadatka, onda moraju trokuti $A_oB_oC_o$ i (A) (B) (C) biti sukladni.

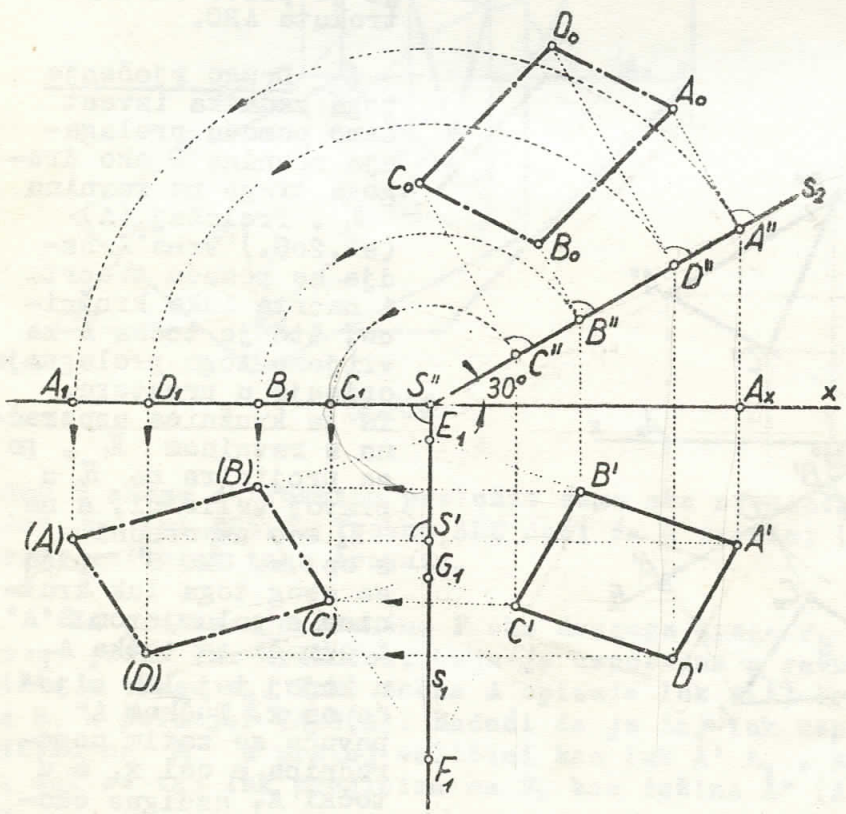
Produžimo li stranicu AB trokuta ABC / sl.205./, ona će probosti π_2 u točki D_2, koja je na drugom tragu r_2 ravnine E. Kako je $D_2 \equiv D_2''$, mora točkom D_2 da ide nacrt A"B" te stranice, a kako je za vrijeme prelaganja ravnine E oko njezinog traga r_2 ostala točka D_2 na istom mjestu, treba točkom D_2 da ide i produženje preložaja (A) (B) stranice AB. Produženje nacrta A"B" stranice AB i produženje preložaja (A) (B) te stranice moraju se prema tome sjeći na sl. 206. u točki D_2, koja je na drugom tragu r_2 te ravnine E. Isto tako se na drugom tragu r_2 treba da sijeku produženja nacrta i produženja odgovarajućih preložaja drugih dviju stranica toga trokuta. Pored toga i nacrt svakoga vrha trokuta i njegov preložaj oko traga r_2 na ravnini π_1 nalaze na zrakama, koje su medju sobom usporedne.

Iz toga zaključujemo:

Nacrt A"B"C" trokuta ABC, koji je u prvoj projicirajućoj ravnini, i njegov preložaj (A) (B) (C) u ravnini π_2 oko drugoga traga ravnine trokuta su perspektivno afini likovi.

To pravilo vrijedi za svaki ravan lik, koji je u prvoj projicirajućoj ravnini.

B.- Lik je u drugoj projicirajućoj ravnini.-



Sl. 207

Zadani su tragovi s_1 i s_2 druge projicirajuće ravnine Σ ($\Sigma \measuredangle \pi_1 = 30°$) i projekcije paralelograma ABCD, koji je u njoj; treba odrediti njegovu pravu veličinu!

Taj zadatak možemo riješiti na dva načina: Ravninu Σ skupa s paralelogramom preložimo oko njezinog drugog traga na ravninu π_2, ili je preložimo oko njezinog prvog traga na ravninu π_1.

Prvo rješenje: Preložaj A_o vrha A oko traga s_2 na π_2 nadje se tako / sl.207./, da se u nacrtu A" postavi okomica na s_2 i u-

čini $A''A_0 = A_x A'$.

Na isti se način nadju preložaji B_0, C_0 i D_0 vrhova B, C i D, pa se tako dobije paralelogram $A_0B_0C_0D_0$, koji je prava veličina paralelograma ABCD.

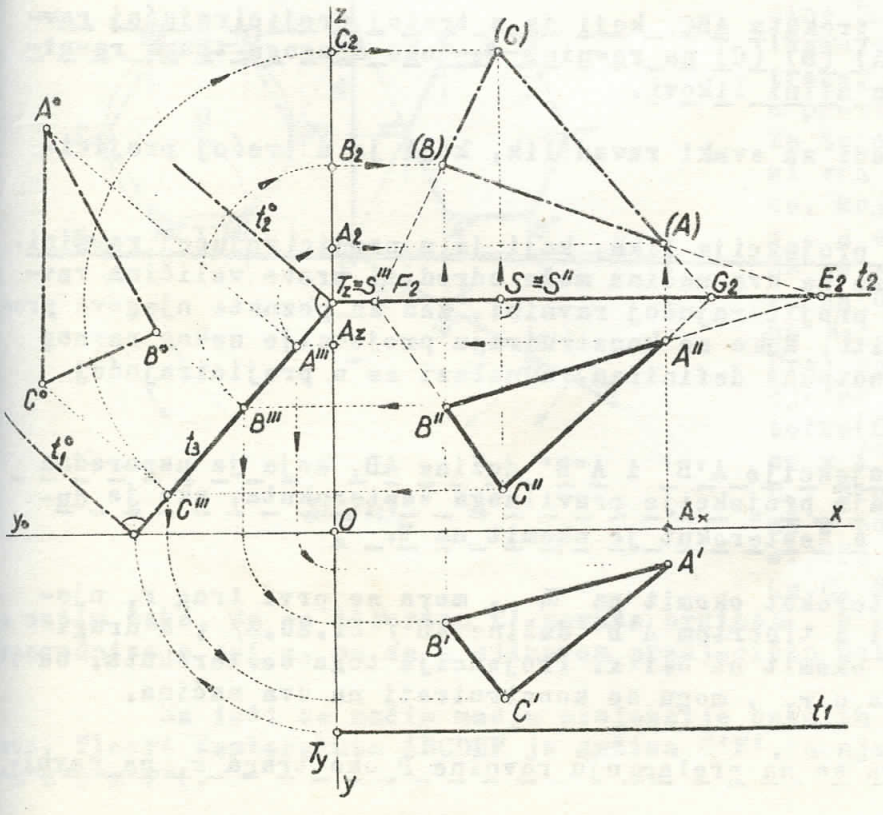
Drugo rješenje: Preložaj (A) vrha A oko traga s_1 na ravnini π_1 nadje se /sl.207/ pomoću tlocrta i nacrta luka kružnice, što je točka A za vrijeme prelaganja opisuje u prostoru. Ta je kružnica usporedna s π_2 , pa se projicira na π_2 u pravoj veličini, a na π_1 kao usporednica s osi x. Točkom A' povuče se zbog toga usporednica s osi x, koja presiječe prvi trag s_1 u tlocrtu $S' \equiv S$ središta te kružnice .Opiše se zatim oko S" luk kružnice s polumjerom S"A" , označi točka A_1 , u kojoj taj luk siječe os x, pa se u točki A_1 postavi okomica na os x. Ta okomica presiječe pravac / A'S' / u traženoj točki (A). Na isti se način nadju preložaji (B), (C) i (D) vrhova B, C i D, pa se tako dobije paralelogram (A) (B) (C) (D), koji je prava veličina paralelograma ABCD.

Ako produženje tlocrta A'B' stranice AB siječe prvi trag s_1 u točki E_1, onda mora točkom E_1 da prolazi i produženje preložaja (A) (B) te stranice, jer je točka E_1 prvo probodište produžene stranice AB, koje je za vrijeme prelaganja ostalo na istom mjestu. Isto tako se na prvom tragu s_1 moraju sjeći produženja tlocrta i produženja odgovarajućih preložaja ostalih stranica paralelograma. Pored toga se tlocrt svakoga vrha paralelograma i njegov preložaj oko traga s_1 na ravnini π_1 nalaze na usporednim zrakama, pa iz toga zaključujemo:

Tlocrt A'B'C'D' paralelograma ABCD, koji je u drugoj projicirajućoj ravnini, i njegov preložaj (A) (B) (C) (D) na ravnini π_1 oko prvoga traga ravnine paralelograma su perspektivno afini likovi.

To pravilo vrijedi za svaki ravan lik, koji je u drugoj projicirajućoj ravnini.

C.- Lik je u trećoj projicirajućoj ravnini.



Sl. 208.

Zadani su tragovi treće projicirajuće ravnine T i projekcije trokuta ABC, koji je u njoj, treba odrediti njegovu pravu veličinu!

Na slici 208. uzeti su po volji tragovi t_1 i t_2 ravnine T, pa je pomoću njih konstruiran treći trag t_3. Nacrt A"B"C" trokuta ABC možemo također uzeti po volji, ali njegov bokocrt A'''B'''C''' mora biti u tragu t_3 /čl. 59.A./. Tlocrt A'B'C' toga trokuta moramo konstruirati, i to tako,

da nadjemo tlocrt svakog vrha trokuta pomoću nacrta i bokocrta toga vrha, na pr. A A' i A_z A''' i t.d. Pravu veličinu toga trokuta možemo odrediti i na ovom zadatku na dva načina.

Prvi način: Ravninu T skupa s trokutom preložimo oko njezinog trećeg traga t_3 na ravninu π_3 . Preložaj A^0 vrha A oko traga t_3 na π_3 nadjemo tako, da u njegovom bokocrtu A''' postavimo okomicu na t_3 i učinimo $A'''A^0 = A''A_z$, jer je dužina $A\,A'''$, u prostoru /sl.158./ jednaka dužini $A''A_z$. Na isti se način nadju preložaji B^0 i C^0 vrhova B i C, pa dobijemo trokut $A^0B^0C^0$, koji je prava veličina trokuta ABC.

Drugi način: Ravninu T skupa s trokutom preložimo oko njezinog prvog traga t_1 na ravninu π_1 , ili oko njezinog drugog traga na ravninu π_2 . Na slici 208. preložena je ravnina oko njezinog drugog traga. Preložaj (C), na pr., vrha C oko traga t_2 na ravnini π_2 nadje se pomoću nacrta i bokocrta kružnice, što je točka C opisuje u prostoru za vrijeme prelaganja. Ta je kružnica usporedna s π_3 , pa se projicira na π_3 u pravoj veličini, a na π_2 kao usporednica s osi z. Njezino središte se nalazi na tragu t_2 u točki $S \equiv S''$, koja se dobije kao sjecište traga t_2 i usporednice s osi z povučene točkom C''. Bokocrt S''' toga središta je u točki T_z. Opiše se zatim oko S''' luk kružnice s polumjerom $S'''C'''$ i označi točka C_2, u kojoj taj luk siječe os z. Okomica, koja se u točki C_2 postavi na os z, presječe pravac / C''S'' / u traženom preložaju (C) točke C. Na isti se način nadju preložaji (A) i (B) vrhova A i B, pa se tako dobije trokut (A) (B)(C), koji je prava veličina trokuta ABC.

Točka E_2, u kojoj se sijeku trag t_2 i produženi nacrt $A''B''$ stranice AB, jest drugo probodište te stranice. Tom točkom mora ići preložaj (A) (B) te stranice, jer točka E_2 ostaje za vrijeme prelaganja na istom mjestu. Isto tako se na tragu t_2 moraju sjeći produženja nacrta i produženja odgovarajućih preložaja ostalih dviju stranica trokuta. Pored toga se nacrt svakog vrha trokuta i njegov preložaj oko traga t_2 na ravnini π_2 nalaze na usporednim zrakama, pa iz toga izvodimo ovo pravilo:

Bokocrt $A'''B'''C'''$ trokuta ABC, koji je u trećoj projicirajućoj ravnini, i njegov preložaj (A) (B) (C) na ravnini π_2 oko drugoga traga ravnine trokuta su perspektivno afini likovi.

To pravilo vrijedi za svaki ravan lik, koji je u trećoj projicirajućoj ravnini.

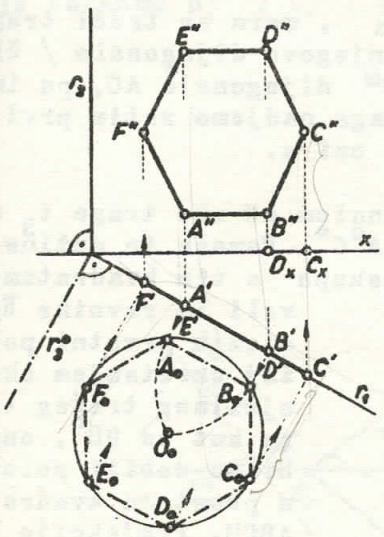
68. Konstruiranje projekcija lika, koji je u projicirajućoj ravnini. U čl.67. vidjeli smo, da se na dva načina može odrediti prava veličina ravnog lika, koji je u nekoj projicirajućoj ravnini, kad su poznate njegove projekcije, a sada ćemo naučiti, kako se konstruiraju projekcije nekog ravnog lika, koji je u prostoru potpuno definiran, a nalazi se u projicirajućoj ravnini.

A.- Zadane su projekcije $A'B'$ i $A''B''$ dužine AB, koja je usporedna s π_1 i neka se konstruiraju projekcije pravilnoga šesterokuta, ako je dužina AB njegova stranica, a šesterokut je okomit na π_1 .

Budući da je šesterokut okomit na π_1 , mora se prvi trag r_1 njegove ravnine P poklopiti s tlocrtom $A'B'$ dužine AB / čl.29.A/ , a drugi trag te ravnine r_2 bit će okomit na osi x. Projekcije toga šesterokuta, od kojih prva projekcija pada u r_1 , mogu se konstruirati na dva načina.

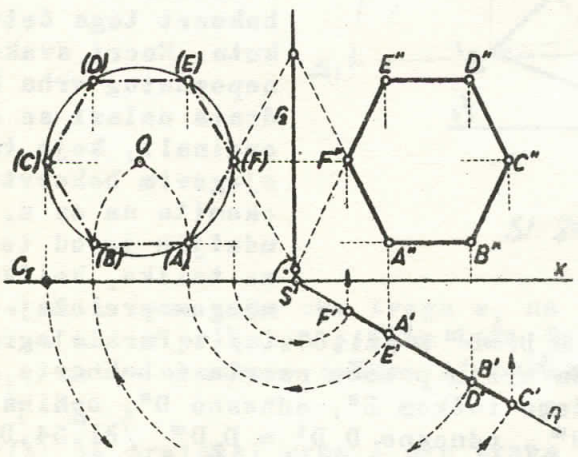
Prvi način osniva se na prelaganju ravnine P oko traga r_1 na ravni-

na Π_1 / sl.209./. Preloži se ravnina P skupa s dužinom AB oko traga r_1 na ravninu Π_1 kao na sl. 204., pa se dobije dužina A_0B_0. Pomoću te dužine nadje se točka O_0, koja je središte one kružnice, koja se može opisati oko pravilnog šesterokuta, kojemu je dužina A_0B_0 stranica. U tu kružnicu upiše se zatim taj pravilni šesterokut $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$. Kad bi se sada ravnina P skupa s tim šesterokutom dovela iz ravnine Π_1 u njezin prvotni položaj okretanjem oko njezinog prvog traga za kut od 90^0, onda bi se dobio položaj u prostoru šesterokuta ABCDEF. Projekcije toga šesterokuta nadju se prema tome ovako: Iz vrhova C_0, D_0, E_0 i F_0 šesterokuta $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ spuste se okomice na trag r_1. Nožišta tih okomica na tragu r_1 su tlocrti C', D', E' i F' nepoznatih vrhova šesterokuta ABCDEF, a dužina C'F' je tlocrt toga šesterokuta. Nacrt svakog nepoznatog vrha šesterokuta nalazi se na ordinali, koja ide njegovim tlocrtom, a udaljen je od osi x za toliko, koliko je njegov položaj udaljen od traga r_1, t.j. $C_xC'' = C'C_0$, $D_xD'' = D'D_0$ i t.d. Kad se na kraju medju sobom spoje nacrti susjednih vrhova šesterokuta dobije se nacrt A"B"C"D"E"F" toga šesterokuta.



Sl. 209.

Drugi način osniva se na prelaganju ravnine P oko traga r_2 na ravninu Π_2. / sl.210./ Preloži se ravnina P skupa s dužinom AB oko traga r_2 na ravninu Π_2, kao na slici 205., pa se dobije dužina (A) (B). Konstruira se zatim pravilni šesterokut, kojemu je dužina (A) (B) stranica. Ako se sada ravnina P skupa s tim šesterokutom dovede iz ravnine Π_2 u prvotni položaj prelaganjem oko njezinog drugog traga, onda se dobije položaj u prostoru šesterokuta ABCDEF. Za toga prelaganja opisuje svaki vrh šesterokuta luk kružnice, kojoj je središte u tragu r_2, a ona je usporedna s Π_1, pa se zbog toga taj luk projicira na Π_1 u pravoj veličini, a na Π_2 kao usporednica s osi x. Projekcije C' i C" vrha C nadju se prema tome ovako: Iz točke(C) spusti se okomica na os x i označi njezino nožište C_1. Oko S' opiše se luk kružnice s polumjerom $S'C_1$, koji presiječe trag r_1 u tlocrtu C' točke C. Nacrt C" te točke dobije se zatim tako, da se tlocrtom C' povuče ordinala, a preložajem (C) nacrta usporednica s osi x, pa se u njihovom presjecištu nalazi traženi nacrt C".



Sl. 210.

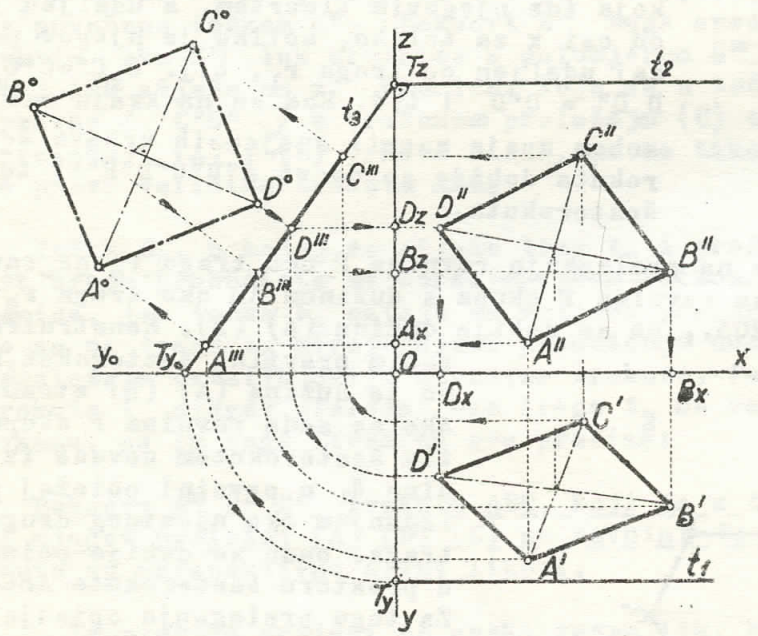
Na isti se način nadju projekcije ostalih vrhova D, E i F šesterokuta. Tlocrt šesterokuta ABCDEF je dužina C'F', a njegov nacrt je šesterokut A"B"C"D"E"F".

Budući da su šesterokuti (A) (B) (C) (D) (E) (F) i A"B"C"D"E"F" perspektivno afini likovi, a trag r_2 je njihova os afinosti, moraju se produženja pridruženih stranica tih šesterokuta presijecati u točkama traga r_2.

B.- Zadane su projekcije A'C' i A"C" dijagonale AC kvadrata ABCD, koji je okomit na ravnini π_3; nacrtaj projekcije toga kvadrata!

Budući da je kvadrat okomit na ravnini π_3, mora se tréći trag t_3 njegove ravnine T poklopiti s bokocrtom $A'''C'''$ njegove dijagonale / čl. 58.A/. Nacrtamo zbog toga najprije bokocrt $A'''C'''$ dijagonale AC, pa imamo odmah i treći trag t_3 ravnine T, a pomoću toga traga nadjemo zatim prvi trag t_1 i drugi trag t_2 te ravnine, koji su usporedni s osi x.

Preložimo zatim ravninu T skupa s dijagonalom AC oko traga t_3 na ravninu π_3, kao na sl. 208., pa dobijemo dužinu A^0C^0. Pomoću te dužine nacrtame kvadrat $A^0B^0C^0D^0$. Kad bismo sada ravninu T skupa s tim kvadratom doveli iz ravnine π_3 u njezin prvotni položaj okretanjem oko njezinog trećeg traga za kut od 90^0, onda bismo dobili položaj u prostoru kvadrata ABCD. Projekcije kvadrata nadjemo prema tome ovako: Iz vrhova B^0 i D^0 kvadrata $A^0B^0C^0D^0$ spustimo okomice na trag t_3. Nožišta tih okomica na tragu t_3 su bokocrti B''' i D''' nepoznatih vrheva kvadrata ABCD, a dužina $A'''C'''$ je bokocrt toga četverokuta. Nacrt svakog nepoznatog vrha kvadrata nalazi se na ordinali, koja ide njegovim bokocrtom okomito na os z, a udaljen je od te osi za toliko, koliko je njegov preložaj udaljen od traga t_3, t.j. $B_zB'' = B'''B^0$, $D_zD'' = D'''D^0$ /čl.67.C./. Paralelogram A"B"C"D" je nacrt traženog kvadrata. Na kraju pomoću nacrta i bokocrta odredimo tlocrt vrha B, odnosno D. Povučemo točkom B'', odnosno D'', ordinalu okomito na os x, pa učinimo $B_xB' = B_zB'''$, odnosno $D_xD' = D_zD'''$ /čl.54.B/. Paralelogram A'B'C'D' je tlocrt traženog kvadrata.



Sl. 211.

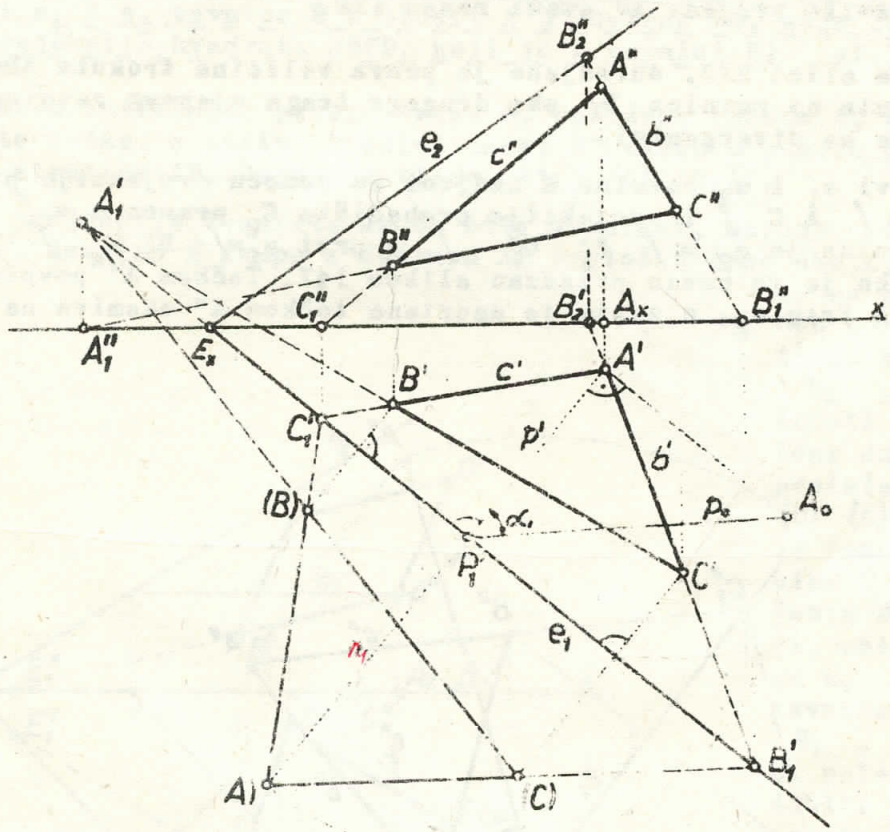
Taj bi se zadatak mogao riješiti još i prelaganjem treće projicirajuće ravnine T skupa s dijagonalom AC oko njezinog prvog traga t_1 na ravninu π_1, ili oko njezinog drugog traga t_2 na ravninu π_2 /sl.208./, ali ti načini iziskuju više konstruktivnih crta nego način prikazan slikom 211.

69. Određivanje prave veličine lika, koji je u općoj ravnini

Kad su zadane projekcije nekog ravnog lika, koji je u općem položaju, njegova se prava veličina može odrediti tako, da se nadju tragovi njegove ravnine, a zatim se taj lik preloži oko prvoga traga na π_1, ili oko drugoga traga na π_2, pa je prvi, ili drugi preložaj toga lika, ujedno i njegova prava veličina.

Odredi pravu veličinu trokuta ABC, ako su zadane njegove projekcije. (sl. 212.)

A.- Da bismo našli tragove ravnine E toga trokuta, moramo odrediti projekcije probodišta dviju produženih stranica trokuta.
Nadjimo, kao na sl. 78., projekcije probodišta B_1 i B_2 pravca $b = [\ A\ C\ ]$. i projekcije probodišta C_1 pravca $c = [\ A\ B\ ]$. Prvi trag e_1 ravnine E određen je točkama B_1' i C_1', a njezin drugi trag e_2 točkama E_x i B_2''. Trokut



Sl. 212.

ABC preložit ćemo sada oko traga e_1 na ravninu Π_1. Preložaj (A) vrha A odredimo na način prikazan slikom 145. Točkom A' povučemo okomicu p' na trag e_1, zatim nacrtamo točkom A' okomicu na p', pa učinimo $A'A_0 = A_x A''$ i $P_1'(A) = P_1' A_0$.

Točka (A) je preložaj vrha A oko traga e_1 na Π_1. Preložaj (B) vrha B, kao i preložaj (C) vrha C, mogli bismo odrediti na isti način, ali možemo lakše doći do tih preložaja ovako: Za prelaganja ravnine E oko traga e_1 ostaje svaka točka toga traga na istom mjestu, pa će i točke $C_1 \equiv C_1'$ i $B_1 \equiv B_1'$, u kojima produžene stranice c i b trokuta probadaju ravninu Π_1, ostati na svojim mjestima.
Dužina $C_1'(A)$, odnosno $B_1'(A)$, biti će prema tome preložaj dužine C_1A, odnosno dužine B_1A, na ravnini Π_1 oko traga e_1. Ako sada iz B' povučemo okomicu na trag e_1, ona će presjeći dužinu $C_1'(A)$ u traženoj točki (B), dok će okomica povučena iz C' na trag e_1 presjeći dužinu $B_1'(A)$ u traženoj točki (C). Trokut (A) (B) (C) je prava veličina trokuta ABC.

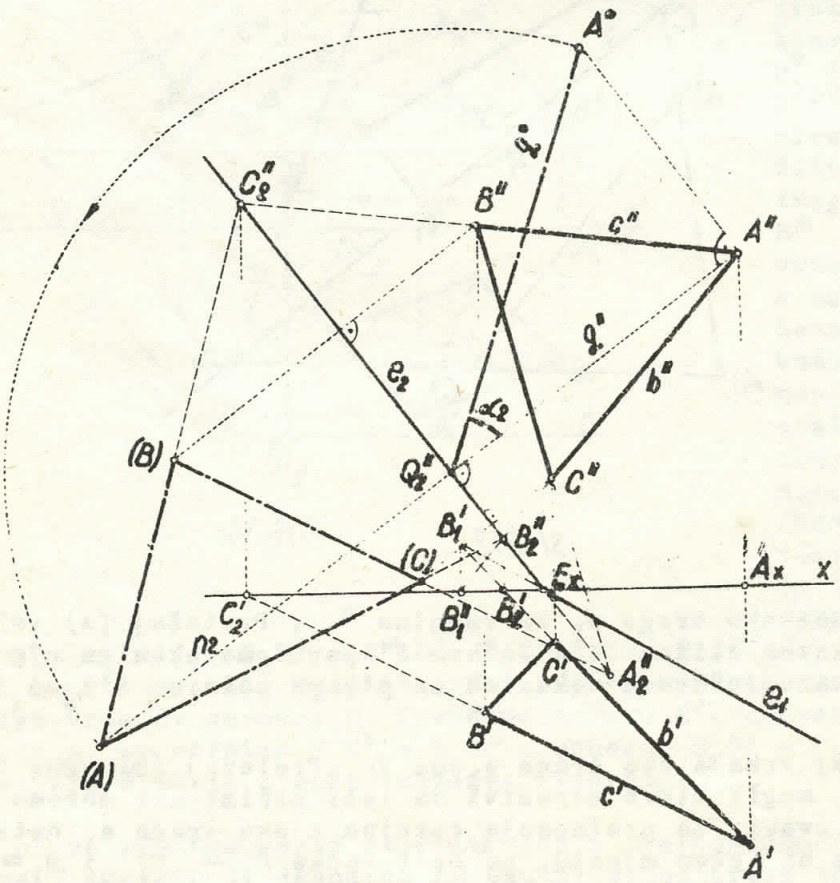
Produžimo li stranicu $B'C'$ tlocrta trokuta $A'B'C'$ i odgovarajuću stranicu $(B)(C)$ trokuta $(A)(B)(C)$, one će se presjeći u točki A_1', koja je na tragu e_1, jer je $A_1' \equiv A_1$ prvo probodište produžene stranice BC. Budući da su spojnice pridruženih vrhova trokuta $A'B'C'$ i $(A)(B)(C)$ medju sobom usporedne, a pridružene stranice tih trokuta sijeku se u točkama, koje su na tragu e_1, to su ta dva trokuta perspektivno afina.

Tlocrt $A'B'C'$ trokuta ABC i njegov preložaj $(A)(B)(C)$ na ravnini Π_1 oko prvoga traga ravnine trokuta su perspektivno afini.

To pravilo vrijedi za svaki ravan lik.

B. - Na slici 213. odredjena je prava veličina trokuta ABC prelaganjem toga trokuta na ravninu Π_2 oko drugoga traga njegove ravnine E, a tragovi te ravnine su divergentni.

Tragovi e_1 i e_2 ravnine E nadjeni su pomoću projekcija probodišta B_1 i B_2 pravca $b \equiv [\,A\,C\,]$ i projekcija probodišta C_2 pravca $c \equiv [\,A\,B\,]$. Drugi trag te ravnine je $e_2 \equiv [\,B_2''\;C_2''\,]$, a prvi $e_1 \equiv [\,B_1'\;E_x\,]$. Preložaj (A) vrha A, odredjen je na način prikazan slikom 147. Točkom A'' povučena je okomica $q'' \equiv n_2$ na trag e_2, a zatim je nacrtana točkom A'' okomica na q'', pa



Sl. 213.

je učinjeno $A''A^{\circ} \equiv A_x A'$ i $Q_2''\,(A) \equiv Q_2''\,A^{\circ}$. Preložaj (B) vrha B nadjen je zatim kao presjecište dužine $C_2''\,(A)$ i okomice povučene iz točke B'' na trag e_2, a preložaj (C) vrha C odredjen je kao presjecište dužine $B_2''\,(A)$ i okomice povučene točkom C'' na trag e_2.

Spojnice pridruženih vrhova trokuta A"B"C" i (A) (B) (C) medju sobom su usporedne, a pridružene stranice tih trokuta sijeku se u točkama, koje su na tragu e_2, pa iz toga zaključujemo, da su ta dva trokuta perspektivno afina.

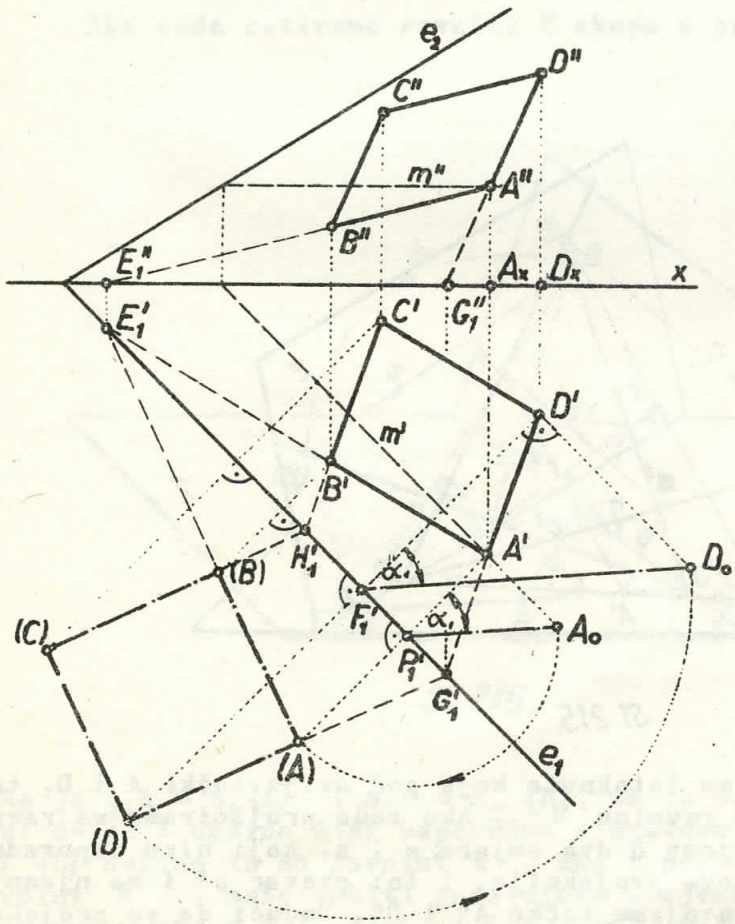
Nacrt A"B"C" trokuta ABC i njegov preložaj (A) (B) (C) na ravnini Π_2 oko drugoga traga ravnine trokuta su perspektivno afini likovi.

To pravilo vrijedi za svaki ravan lik.

70. Konstruiranje projekcija lika, koji je u općoj ravnini. Zadani su tragovi e_1 i e_2 ravnine E i tlocrt A'B' dužine AB, koja je u toj ravnini; nacrtaj projekcije kvadrata ABCD, koji je u ravnini E! /sl.214./

Pomoću sutražnice prvoga traga m, položene točkom A, odredimo najprije nacrt A" te točke, a zatim odredimo nacrt B" točke B pomoću nacrta A"E_1" produžene stranice AB, kojoj je tlocrt A'E_1' /čl.32.A/.

Budući da projekcije kvadrata ne će biti kvadrati, moramo taj zadatak riješiti ovako. Ravninu E skupa s dužinom AB preložit ćemo oko njezinog traga e_1 na ravninu Π_1, ili oko njezinog drugoga traga e_2 na ravninu Π_2, zatim ćemo nacrtati pomoću preložene dužine (A) (B) preloženi kvadrat (A) (B) (C) (D), a na kraju ćemo preloženu ravninu E skupa s preloženim kvadratom dovesti, rotacijom oko traga e_1, odnosno e_2, iz ravnine Π_1, odnosno Π_2, u njezin prvotni položaj, pa ćemo dobiti kvadrat ABCD u prostoru.



Sl. 214.

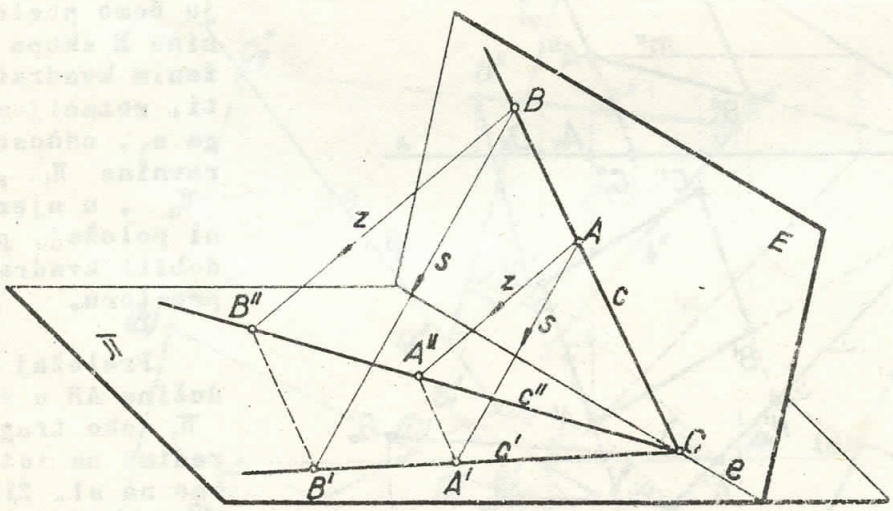
Preložaj (A) (B) dužine AB u ravnini Π_1 oko traga e_1 odredimo na isti način kao na sl. 212. pomoću preložaja (A) točke A i prvoga probodišta $E_1 \equiv E_1'$ produžene dužine AB. Konstruiramo zatim nad dužinom (A) (B) kvadrat (A) (B) (C) (D). Budući da se nad nekom dužinom mogu konstruirati dva kvadrata, jedan na jednoj, a drugi na drugoj strani, taj zadatak ima dva rješenja.

Na slici 214. nacrtan je samo kvadrat (A) (B) (C) (D), koji je s lijeve strane dužine (A) (B), i nadjene su samo njegove projekcije.

Tlocrt D' točke D možemo odrediti na dva načina: pomoću okretanja točke (D) oko prvoga traga e_1 dok ona padne na ravninu E /čl.48.F/ , ili pomoću perspektivne afinosti, koja mora da postoji izmedju lika (A) (B) (C) (D) i lika A'B'C'D' / čl.69.A/ Pri prvom načinu moramo povući točkom (D) okomicu na e_1, zatim nacrtati dužinu F_1' D_0, koja je usporedna s dužinom P_1' A_0, a jednaka dužini F_1' (D), te na kraju povući točkom D_0 okomicu na pravac / (D) F_1' /. Ta se okomica i pravac / (D) F_1' / sijeku u točki D'. Na drugi način dobijemo točku D' tako,da produžimo stranicu (A) (D) do sjecišta G_1' s prvim tragom e_1, zatim nacrtamo pravac / G_1' A' /, a na kraju u presjecištu toga pravca i okomice povučene iz točke (D) na trag e_1 dobijemo traženu točku D' . Na taj drugi način odredjen je i tlocrt C' točke C. Ako su konstrukcije točno izradjene mora lik A'B'C'D' biti paralelogram, jer usporedne dužine imaju usporedne tlocrte.

Nacrt D" točke D nadjemo tako, da učinimo $D_0D'' \equiv D'D_0$ / čl.48.E/ , ili pomoću nacrta G_1'' točke $G_1 \equiv G_1'$, ili pomoću jedne sutražnice prvoga traga ravnine E, koju zamislimo točkom D. Nacrt C" točke C mora biti u presjecištu ordinale položene točkom C' i pravca povučenog točkom B" usporedo s dužinom A"D", ili pravac povučen točkom D" usporedo s dužinom A"B". Lik A"B"C"D" mora biti paralelogram, jer usporedne dužine imaju usporedne nacrte.

71. Paralelne projekcije i preložaj ravnog lika. Slikom 215. prikazane su dvije ravnine Π i E, koje se sijeku u pravcu e. U ravnini E



Sl. 215.

nacrtan je pravac c i na njemu su istaknute koje god dvije točke A i B, te ona točka C, u kojoj on probada ravninu Π . Ako sada projiciramo na ravninu Π taj pravac i točke na njemu u dva smjera s i z, koji nisu usporedni s ravninom Π , dobit ćemo njihove projekcije, i to: pravac c' i na njemu točke A', B' , te pravac c" i na njemu točke A" i B". Budući da se projekcije C' i C" točke C poklapaju s tom točkom, izlazi da se pravci c' i c" moraju sjeći u točki C.

Sjecišta projekcijâ svakog pravca ravnine E moraju biti na tragu e te ravnine.

Zrake s i z, koje izlaze iz točke A, odredjuju ravninu Γ , koja siječe ravninu Π u pravcu / A' A" /, a zrake s i z, koje izlaze iz točke B odredjuju ravninu Δ , koja siječe ravninu Π u pravcu / B' B" /. Budu-

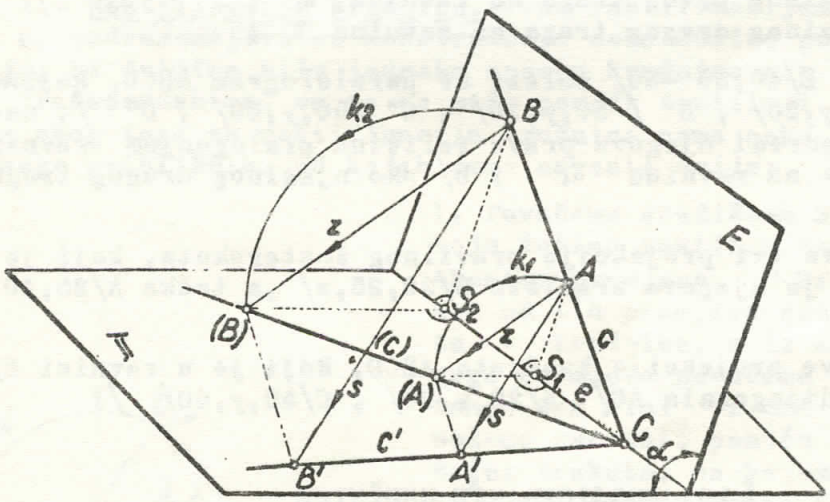
ći da su ravnine Γ i Δ medju sobom usporedne, one presijecaju ravninu Π u usporednim presječnicama, dakle su pravci $[A'A'']$ i $[B'B'']$ medju sobom usporedni. Iz toga izlazi:

Spojnice_projekcijâ svake točke ravnine E moraju_biti medju sobom usporedne.

Utvrdili smo prema tome, da će izmedju projekcije nekog ravnog lika ravnine E u smjeru zrake projiciranja s i projekcije toga istog lika u smjeru zrake projiciranja z postojati dva karakteristična odnosa za njihovu perspektivnu afinost. Lako se možemó uvjeriti, da za te projekcije postoje još i ona tri preostala karakteristična odnosa navedena u čl.39.B, pa iz toga izlazi:

1._Dvije_paralelne_projekcije_na_ravnini_Π_istoga_ravnog_lika_su perspektivno_afini_likovi._Os_afinosti_je_trag_ravnine_toga_lika_na_ravnini_Π_.

Slikom 216. prikazane su opet dvije ravnine Π i E, koje se sijeku u pravcu e, a zatvaraju kut α. Na pravcu c, koji je u ravnini E, a probada ravninu Π u točki C, istaknute su dvije točke A i B. Projiciramo li zatim taj pravac na ravninu Π u smjeru s, dobijemo pravac c' i točke A', B' i C na njemu.



Sl. 216.

Ako sada rotiramo ravninu E skupa s pravcem c za kut α, dobit ćemo u ravnini Π preložaj (c) pravca c i točaka (A) i (B) na njemu. Pravac (c) mora ići točkom C, jer ona ostaje na istom mjestu za rotiranja ravnine E oko pravca e. Ako je točka S_1 središte rotacije točke A, a točka S_2 središte rotacije točke B, bit će kut rotacije točke A jednak kutu rotacije točke B, t.j. $\sphericalangle AS_1(A) = \sphericalangle BS_2(B) = \alpha$; a kako je $S_1A = S_1(A)$ i $S_2B = S_2(B)$, te je $S_1A \parallel S_2B$ i $S_1(A) \parallel S_2(B)$, izlazi da je i dužina $A(A)$ usporedna s dužinom $B(B)$. Prema tome se preložaj (A) (B) dužine AB na ravnini Π, kao i preložaj svakog lika ravnine E na ravnini Π, može dobiti paralelnom projekcijom te dužine, odnosno lika, u smjeru zrake $z = [A(A)]$ ili $z = [B(B)]$, koja je okomita na ravnini simetrije kuta α. Na temelju toga i pravila 1. iz toga članka izvodimo ovo drugo pravilo:

2. Paralelna_projekcija_nekog_ravnog_lika_na_ravnini_Π_i_preložaj_toga_lika_na_toj_ravnini_oko_traga_ravnine_lika_su_perspektivno_afini likovi. Os_afinosti_je_trag_ravnine_toga_lika_na_ravnini_Π_.

Budući da je svako normalna projekcija nekog ravnog lika ujedno i njegova paralelna projekcija, izlazi, da su pravila iz čl.67.A, B i C, te iz čl. 69. A i B samo specijalni slučajevi toga drugog pravila.

72. Vježbe.- 1. U ravnini P /60,40,∞ / nalazi se paralelogram ABCD, kojemu je zadan nacrt [A"/10,y,20/ , B"/40,y,10/ , C"/50,y,40/ , D"]; nacrtaj njegov tlocrt, a zatim odredi njegovu pravu veličinu na oba načina!

2. U ravnini Σ /60,∞,40/ nalazi se paralelogram ABCD, kojemu je zadan tlocrt [A' /10,20,z/ , B' /20,50,z/ , C' /50,40,z/ , D']; nacrtaj njegov nacrt i odredi na oba načina njegovu pravu veličinu!

3. U ravnini T /∞,50,40/ nalazi se paralelogram, kojemu je zadan tlocrt [A'/10,30,z/, B' /40,40,z/ , C' /60,20,z/ , D']; nacrtaj njegov bokocrt i nacrt, a zatim odredi njegovu pravu veličinu na oba načina!

4. Zadana je dužina AC[A/10,40,30/ , C/40,10,45/]; nacrtaj tlocrt i nacrt kvadrata ABCD, kojemu je dužina AC dijagonala, ako je njegova ravnina okomita : a/ na ravnini π_1 , b/ na ravnini π_2 !

5. Nacrtaj tlocrt i nacrt pravilnog šesterokuta ABCDEF, kojemu je dužina AD[A/10,15,15/ , D/30,30,35/] dijagonala, a on je okomit: a/ na ravnini π_1 , b/ na ravnini π_2 !

6. Nacrtaj sve projekcije pravilnog peterokuta, kojemu je dužina AB[A/ 30,20,30/ , B/10,40,40/] stranica, a on je okomit na π_2 !

7. U ravnini E/70,60,50/ nalazi se paralelogram ABCD, kojemu je zadan tlocrt [A'/5,30,z/ , B'/25,30,z/ , C' /25,10,z/ , D']; nacrtaj njegov nacrt, a zatim odredi njegovu pravu veličinu prelaganjem ravnine E :
a/ oko njezinog prvog traga na ravninu π_1 ;
b/ oko njezinog drugog traga na ravninu π_2 !

8. U ravnini E/40,50 -50/ nalazi se paralelogram ABCD, kojemu je zadan nacrt [A" / 20,y,20/ , B" / 50,y,30/ , C" /60,y,50/ , D"]; nacrtaj njegov tlocrt, a zatim odredi njegovu pravu veličinu prelaganjem ravnine E: a/ oko njezinog prvog traga na ravninu π_1 ; b/ oko njezinog drugog traga na ravninu π_2 !

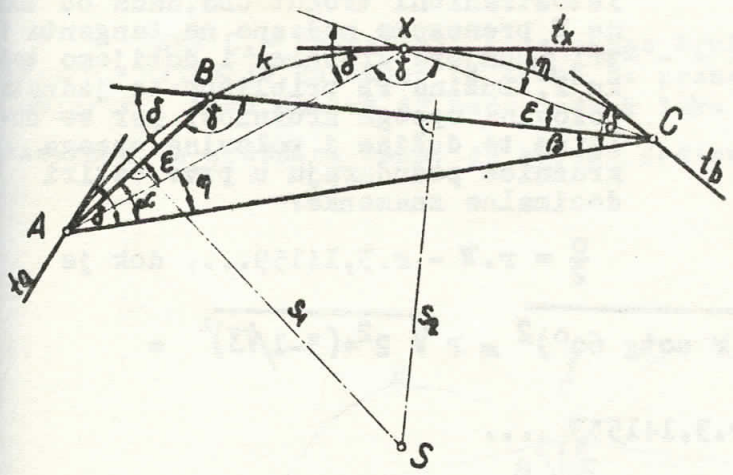
9. Nacrtaj sve tri projekcije pravilnog šesterokuta, koji je u ravnini E/100,70,60/ , ako je njegovo središte S/30,25,z/ ,a točka A/25,40,z/ jedan njegov vrh!

10. Nacrtaj sve projekcije kvadrata ABCD, koji je u ravnini E/50, 30,-50/ , a njegova je dijagonala AC[A/20,y,30/ , C/50,y,60/]!

§10. PROJICIRANJE KRUŽNICE

73. Kružni luk odredjen točkama A, B i C. Tri točke A, B i C, koje nisu na istom pravcu, odredjuju kružnicu k. Središte S te kružnice bit će presjecište simetrala stranica trokuta ABC. Na sl. 217. nacrtane su samo simetrale s_1 i s_2 stranice AB i BC. Kad se središte S nalazi izvan medje crteža, mogu se pojedine točke kružnog luka AC odrediti primjenom ovog planimetrijskog pravila: Svi obodni kutovi, koji su nad istim lukom kružnice, medju sobom su jednaki. Ako je obodni kut ABC = γ , onda mora za svaku točku X, koja je na kružnici k, a nalazi se s točkom B na istoj strani dužine AC, biti ∢ AXC = γ . Povučemo li prema tome točkom A pravac [AX], a točkom C pravac [CX] tako, da bude ∢ BAX = ε = ∢ BCX, onda će se pravci [AX] i [CX] sjeći u točki X, koja je na kružnom luku ABC. Trokuti ABC i AXC imaju zajedničku stranicu AC. Kutovi tih trokuta na toj strani su α i β u jednome, a α-ε i β+ε u drugome. Njihovi treći kutovi, t.j. ∢ ABC i ∢ AXC, bit će medju sobom jednaki, jer je u jednom i drugom trokutu

$\gamma = 180 - /\alpha + \beta/$, pa je zbog toga točka X na kružnom luku ABC.



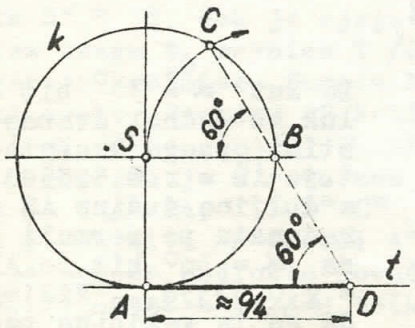
Sl. 217.

Vanjski kut δ trokuta ABC pri vrhu B, jednak je vanjskom kutu δ trokuta AXC, pa će, kad točka X padne u točku C, ili u točku A, tangenta u toj točki zatvarati s dužinom AC kut δ.

Budući da je $\sphericalangle CAX = \eta$ obodni kut nad kružnim lukom $\overset{\frown}{CX}$, to će, kad točka A padne u točku X tetiva AC postati tetiva CX, a tetiva AX postat će tangenta t_x u točki X, pa će zatvarati s dužinom CX kut η.

74. Rektifikacija kružnice i kružnog luka

A.- Rektifikacija kružnice.- Pod rektifikacijom kružnice k zadanog polumjera r, podrazumijeva se konstrukcija neke dužine pomoću šestila i ravnala, kojoj bi duljina bila jednaka opsegu kružnice o = 2rπ. Budući da je broj π transcendentan, on se ne može pomoću šestila i ravnala točno konstruirati, pa zbog toga za rektifikaciju kružnice nema neke točne konstrukcije, nego ima mnogo približnih, od kojih ćemo navesti dvije:



Sl. 218.

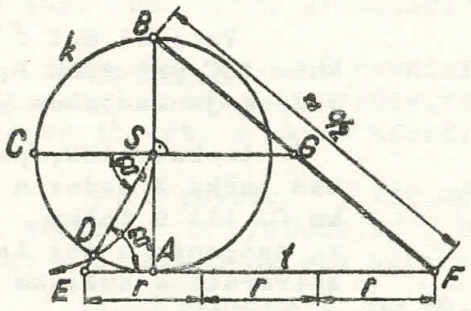
1. Povučemo središtem S kružnice k /sl.218/, koju želimo rektificirati, dva medju sobom okomita promjera. U krajnjoj točki A jednog od tih promjera nacrtamo zatim tangentu t kružnice, a iz krajnje točke B drugoga promjera povučemo pravac, koji s tom tangentom čini $\sphericalangle BDA = 60^0$. Taj pravac možemo nacrtati pomoću raznostraničnog crtaćeg trokuta, na kojemu se nalazi kut od 60^0, ili pomoću točke C, koja s točkama S i B odredjuje istostranični trokut SBC. Dužina AD, koja se na taj način dobije, približno je jednaka četvrtini opsega kružnice, jer se duljina te dužine i četvrtina opsega kružnice podudaraju u prve dvije decimalne znamenke:

$$\frac{o}{4} = \frac{r\pi}{2} = \frac{r.3,14159}{2} = \underline{r.1,57079}\ldots,$$

dok je

$$\overline{AD} = r+r.\mathrm{cotg}\ 60^0 = r/1+\mathrm{cotg}\ 60^0/ = \underline{r.1,57735}.$$

St. 2. Povučemo središtem S kružnice k / sl.219./, koju trebamo rektificirati, dva medju sobom okomita promjera. U krajnjoj točki A jednog od tih promjera nacrtamo zatim tangentu t kružnice, a središtem S povučemo pra-



Sl. 219.

vac, koji s tom tangentom čini ∢ SEt = 60°. Taj pravac možemo nacrtati pomoću raznostraničnog trokuta, na kojemu se nalazi kut od 60°, ili pomoću točke D, koja s točkama C i S određuje istostranični trokut CDS. Sada od točne E prenesemo nadesno na tangentu t tri polumjera kružnice i dobijemo točku F. Dužina FB približno je jednaka polovini opsega kružnice, jer se duljina te dužine i polovina opsega kružnice podudaraju u prve četiri decimalne znamenke:

$\frac{o}{2} = r.\pi - r.3{,}14159...$, dok je

$$FB = \sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AF}^2} = \sqrt{(2r)^2+(3r - r\ \mathrm{cotg}\ 60^\circ)^2} = r\sqrt{2^2+(3-1/\sqrt{3})^2} =$$

$$= r\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} = r.3{,}141533\ ....$$

Promjer, koji je okomit na promjeru AB, siječe dužinu FB u točki G, koja tu dužinu raspolavlja, pa je dužina FG, odnosno dužina GB, približno jednaka četvrtini opsega kružnice.

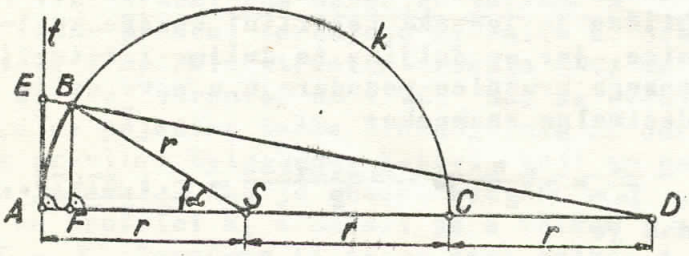
St. B.- Rektifikacija kružnog luka. Kružni luk ne možemo pomoću šestila i ravnala točno rektificirati, već samo približno. Jedna od približnih rektifikacija je ova:

U jednoj krajnjoj točki luka $\overset{\frown}{AB}$, koji želimo rektificirati, postavimo tangentu t na kružnicu k. Nacrtamo zatim pravac [AS], pa iz točke A prenesemo u smjeru središta kružnice na taj pravac tri polumjera kružnice i dobijemo točku D. Povuče li se točkama D i B pravac [DB], koji siječe tangentu t u točki E, onda je dužina AE približno jednaka luku $\overset{\frown}{AB}$. Ukoliko je središnji kut α toga luka manji, utoliko je ta rektifikacija točnija: iz sličnosti pravokutnih trokuta ADE i FDB izlazi, da

$$AE : FB = AD : FD\ ,\ \text{ili}$$

$$AE : r.\sin\alpha = 3r : (2r + r.\cos\alpha),\ \text{ili}$$

$$AE = r\,\frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha} \qquad (1)$$



Sl. 220.

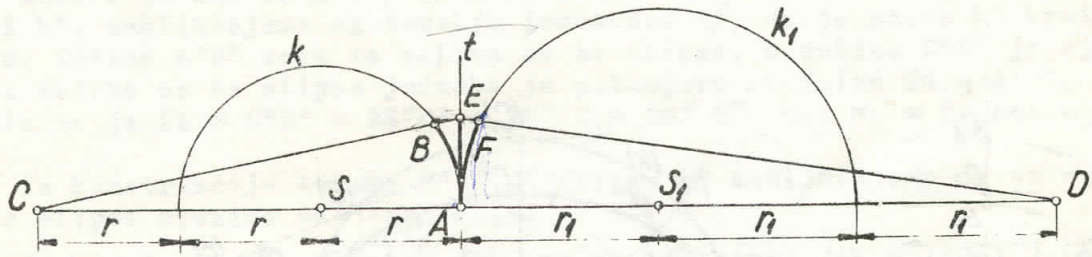
Za kut $\alpha = 30^\circ$ bit će luk AB jednak dvanaestini opsega kružnice t.j. $\overset{\frown}{AB} = r.0{,}523598...$, a duljina dužine AE izračunata po formuli (1) za $\alpha = 30^\circ$ bit će AE = $r.0{,}52336...$ Vidimo, da se te veličine podudaraju u prve tri decimalne znamenke, dakle je $\overline{AE} \approx \overset{\frown}{AB}$.

Za kut $\alpha = 45^\circ$ te bi se veličine podudarale samo u prve dvije decimalne znamenke.

Kad treba rektificirati neki luk, kojemu je središnji kut veći od 30^0, onda se može primijeniti ovaj postupak: Središnji se kut razdijeli na 2 ili na 4 jednaka dijela, tako da svaki dio bude manji od 30^0. Rektificira se zatim kružni luk, koji je nad jednim dijelom toga središnjeg kuta, pa se dobivena dužina podvostruči ili početverostruči, prema tome, da li je središnji kut bio razdijeljen na 2 ili na 4 jednaka dijela.

St. C.- Prenašanje luka jedne kružnice na drugu. Ako luk AB kružnice k, kojoj je polumjer r, treba da prenesemo na kružnicu k_1, kojoj je polumjer r_1, tako da luk AF bude jednak luku AB, onda radimo ovako:

Nacrtamo te kružnice tako, da se one dodiruju u točki A, i konstruiramo nji-



Sl. 221.

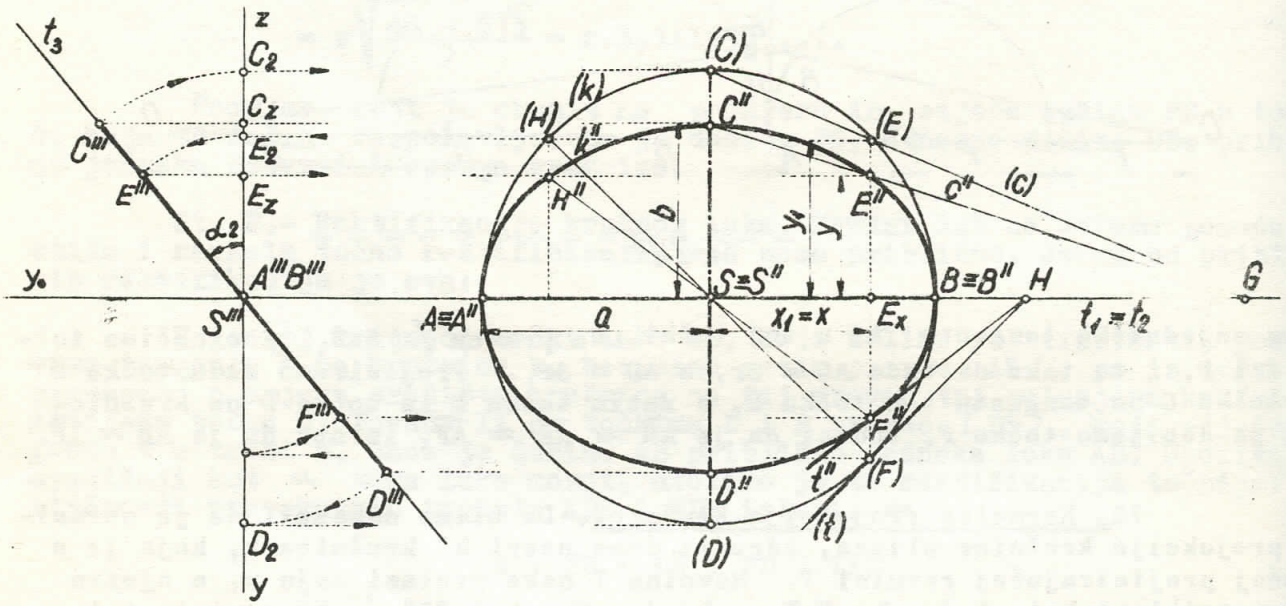
hovu zajedničku tangentu t u toj točki. Na pravcu $[\ S\ S_1\ ]$ označimo točke C i D, i to tako da bude $AC = 3r$, a $AD = 3r_1$. Projicirámo sada točku B iz točke C na tangentu t u točku E, a zatim točku E iz točke D na kružnicu k_1, pa dobijemo točku F. Budući da je $\overset{\frown}{AB} \approx \overline{AE} \approx \overset{\frown}{AF}$, izlazi da je $\overset{\frown}{AB} \approx \overset{\frown}{AF}$.

75. Normalna projekcija kružnice. Da bismo dokazali da je normalna projekcija kružnice elipsa, odredit ćemo nacrt k'' kružnice k, koja je u trećoj projicirajućoj ravnini T. Ravnina T neka prolazi osju x, a njezin drugi prikloni kut, t.j. $\sphericalangle\ \Pi_2 T$, neka je α_2 /sl.222./. Tragovi t_1 i t_2 te ravnine poklapaju se s osi x, a njezin treći trag t_3 zatvara s osi z kut α_2. Ako središte S kružnice k odaberemo u osi x, onda je nacrt toga središta $S'' \equiv S$, dok je njegov bokocrt S'''. Bokocrt k''' kružnice k je u trećem tragu t_3 ravnine T /čl.59./, i to dužina $C'''\ D''' = 2a$, ako je a polumjer te kružnice. Pomoću bokocrta te kružnice konstruiramo zatim njezin nacrt ovako: Promjer AB kružnice k, koji je u osi x, poklapa se sa svojim nacrtom, dakle je $A''B'' \equiv AB = 2a$. Promjer CD, koji je okomit na promjeru AB, usporedan je s ravninom Π_3, zbog toga je njegov bokocrt dužina $C'''\ D'''$, koja je duga 2a, ili $S'''\ C''' = S'''\ D''' = a$, dok je njegov nacrt dužina C''D'', koja je okomita na dužini A''B''. Krajnje točke C'' i D'' nacrta promjera CD dobijemo pomoću ordinala povučenih točkama C''' i D''' okomito na os z. Da bismo odredili nacrt koje god točke kružnice k, preložit ćemo tu kružnicu na ravninu Π_2 oko osi x. Njezin preložaj je kružnica (k), kojoj je promjer AB, jer je taj promjer ostao na svome mjestu za vrijeme prelaganja. Točka (C) je preložaj točke C, a točka (D) je preložaj točke D. Ako sada istaknemo na kružnici (k) neku točku (E), možemo nacrt E'' točke E odrediti na dva načina.

Rotiramo točku (E) oko osi x za kut α_2, dok ona padne na ravninu T, pa odredimo njezin bokocrt i nacrt. Za vrijeme toga rotiranja opisat će točka (E) luk kružnice, koja je usporedna s Π_3, a polumjer joj je jednak udaljenosti $E_x(E)$. Taj se luk projicira na ravninu Π_3 u pravoj veličini sa središtem u S''' kao luk $\overset{\frown}{E_2 E'''}$, a na ravninu Π_2 on se projicira na dužinu $(E)E_x$.

Ordinala povučena točkom E''' okomito na os z siječe dužinu $(E)E_x$ u traženom nacrtu E'' točke E. Na jednak je način odredjen nacrt F'' točke F i nacrt H'' točke H kružnice k. S točkom E je simetrična točka F s obzirom na promjer AB, a točka H s obzirom na promjer CD.

Prema pravilu 2. iz čl. 71. nacrt k'' kružnice k i njezin preložaj (k) na ravnini π_2 su perspektivno afini likovi, za koje je os x os afinosti. Točki (C) pridružena je u toj afinosti točka C'', a točki (D) točka D''. Zrake afinosti su prema tome okomite na osi afinosti. Pravcu $(c) \equiv [\ (C)\ (E)\ ]$, koji siječe os afinosti u točki G, pridružen je pravac $c'' \equiv [\ C''\ G\ ]$, a u sjecištu pravca c'' i zrake afinosti, povučene točkom (E) okomito na os afinosti, nalazi se traženi nacrt E'' točke E. Prvim ili drugim načinom možemo odrediti koliko god hoćemo točaka krivulje k'', koja je nacrt kružnice k.



Sl. 222.

Da je krivulja k'' elipsa možemo dokazati ovako: U pravokutnom koordinatnom sustavu, kojem je ishodište točka $S \equiv S''$, os x jedna os toga sustava, a pravac $y \equiv [\ SC''\ ]$ druga os, neka su x_1 i y_1 koordinate točke (E), a x i y koordinate točke E''. Duljinu dužine $S''C''$ označimo slovom b, a dužine $S''(C)$ slovom a, jer je $S''(C)$ polumjer kružnice k.

Kako je točka (E) na kružnici (k), bit će

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \qquad 1/.$$

Budući da zrake pramena (c), c'' i x, kojemu je vrh G, sijeku paralelne transverzale u razmjernim odrescima, to se

$$S''(C) : S''C'' = E_x(E) : E_xE'',$$

ili

$$a : b = y_1 : y,$$

$$y_1 = \frac{a}{b} \cdot y \qquad 2/.$$

Apscise točaka (E) i E" su jednake, dakle je

$$x_1 = x \qquad 3/.$$

Umetnemo li u jednadžbu 1/. vrijednosti iz jednadžbi 2/ i 3/, dobit ćemo:

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2 ,$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad 4/.$$

Budući da smo sa x i y bili označili koordinate koje god točke E" na krivulji k", zaključujemo na temelju jednadžbe 4/, da je nacrt k" kružnice k elipsa. Dužina A"B" zove se velika os te elipse, a dužina C"D" je njezina mala os. Velika os te elipse jednaka je polumjeru kružnice 2a = A"B", a njezina mala os je 2b = C"D" = 2S"C" = $2S'''C_z = 2S'''C'''\cos\alpha_2 = 2a\cos\alpha_2$.

Iz konstrukcije točaka F" i H" elipse k" zaključujemo da su velika i mala os elipse njezine osi simetrije.

Svakoj tangenti kružnice (k), na pr. tangenti (t) u točki (F), pridružena je jedna tangenta elipse k", t.j. tangenta t" u pridruženoj točki F", a dvije pridružene tangente sijeku se na osi afinosti, u našem primjeru u točki H.

Svakom promjeru kružnice (k), na pr. promjer (F) (H), pridružen je jedan promjer elipse k", na pr. F"H". Od svih promjera elipse njezina velika os je najduži, a mala os najkraći promjer.

Velika os elipse k" je nacrt A"B" onoga promjera AB kružnice k, koji je u ravnini projekcija π_1 , jer se samo taj promjer kružnice projicira na π_2 u pravoj veličini, pa je od svih promjera kružnice njegova projekcija najduža.

Kad središte kružnice k ne bi bilo u ravnini projekcija π_2 , onda bi se nacrt onog promjera kružnice, koji je usporedan s ravninom π_2 , projicirao kao velika os elipse k", jer bi se samo taj promjer kružnice projicirao na π_2 u pravoj veličini. Iz tih razmatranja izvodimo ovo pravilo:

Normalna projekcija kružnice k na nekoj ravnini je elipsa. Velika os te elipse je normalna projekcija onog promjera AB kružnice, koji je usporedan s ravninom projekcija, a njezina mala os je normalna projekcija onog promjera CD kružnice, koji je okomit na promjeru AB. Duljina velike osi te elipse jednaka je promjeru kružnice, a duljina njezine male osi jednaka je umnošku promjera kružnice i cosinusa priklonog kuta, što ga zatvaraju ravnina kružnice i ravnina projekcija.

Budući da je normalna projekcija kružnice ujedno i paralelna projekcija, to su prema pravilu 2 iz čl. 71. kružnica i elipsa iz slike 222. perspektivno afine krivulje.

Konstrukcija elipse, koja proizlazi iz perspektivne afinosti elipse i kružnice nacrtane nad njezinom velikom osi, bila je poznata već Archimedes-u iz Sirakuze /287 - 212 p.n.e./.

Budući da je elipsa normalna projekcija kružnice, morat ćemo elipsu često crtati, pa zbog toga treba da tu krivulju pobliže upoznamo.

76. Elipsa i neke njezine konstrukcije

A.- Definicija elipse. Elipsa se može na više načina definirati, a

jedna njezina definicija je ova:

Elipsa je geometrijsko mjesto točaka ravnine, kojima je zbroj udaljenosti od dviju čvrstih točaka F_1 i F_2 stalan.

Čvrste točke F_1 i F_2 zovu se žarišta ili fokusi.

Na toj definiciji temelji se mehanička konstrukcija elipse, koja je prikazana slikom 223. U točkama F_1 i F_2 crtaćeg papira zabodu se dvije pribodnice i privežu na njima krajevi konca, koji je dulji od razmaka tih pribodnica. Šiljkom olovke nategne se zatim konac. Ako se sada taj šiljak pomiče po papiru oko točaka F_1 i F_2, on opiše elipsu, jer je zbroj udaljenosti svakog položaja šiljka od točaka F_1 i F_2 jednak stalnoj duljini konca. Ta se mehanička konstrukcija elipse nalazi već kod Apollonios-a iz Perge /262-190.p.n.e./. Polovište S dužine F_1F_2 zove se središte elipse. Dužine F_1E i F_2E, koje spajaju žarišta elipse s jednom njezinom točkom E, zovu se provodnice ili radiji vektori točke E. Prema definiciji elipse mora zbroj provodnica svake točke neke elipse biti stalne vrijednosti. Ta se stalna vrijednost zbroja provodnica pojedinih točaka elipse označuje s 2a, dakle je:

$$F_1E+F_2E = F_1D+F_2D=F_1G+F_2G = \ldots\ldots = 2a.$$

Točke A i B elipse, koje su na pravcu $/ F_1F_2 /$, omeđuju dužinu AB, koja se zove velika os elipse, jer je ta dužina jedna os simetrije te krivulje. I za te točke elipse mora biti:

$$F_1A + F_2A = F_1B + F_2B = 2a.$$

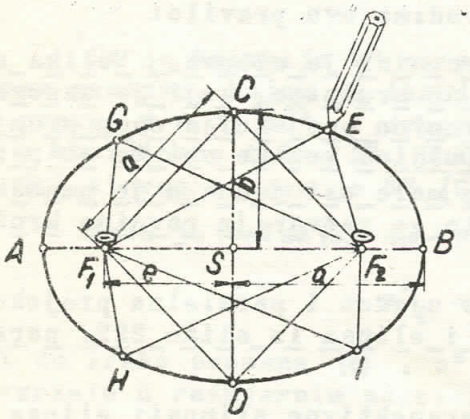
Budući da je dužina F_1A jednaka dužini F_2B, jer su te dvije dužine centralno simetrične s obzirom na središte S, to je:

$$2a = F_1A + F_2A = F_2B + F_2A = AB,$$

dakle je

$$2a = AB$$

Zbroj provodnica svake točke elipse jednak je njezinoj velikoj osi.



Sl.223.

Za točke C i D elipse, koje su na simetrali dužine F_1F_2, bit će

$$F_1C = F_2C = a \quad i \quad F_1D = F_2D = a$$

Dužina CD zove se mala os elipse, jer je ta dužina druga os simetrije te krivulje. Duljina male osi elipse označuje se s 2b.

Krajnje točke A i B velike osi, te krajnje točke C i D male osi, zovu se tjemena ili vrhovi elipse. Dužina SF_1 ili SF_2 zove se linearni ekscentricitet elipse, a njezina se duljina označuje slovom e. Iz pravokutnog trokuta F_1SC izlazi da je:

$$a^2 - b^2 = e^2$$

Svaka dužina, koja spaja dvije točke elipse i prolazi njezinim središtem S, zove se promjer ili dijametar elipse. Od svih promjera elipse njezina je velika os najveći, a mala os najmanji promjer.

B.- Konstrukcija elipse pomoću velike osi i fokusa. Konstruiraj elipsu kojoj je zadana velika os AB = 60 mm i fokusi F_1 i F_2 /$SF_1 = SF_2 = 20$ mm/

/sl.224./

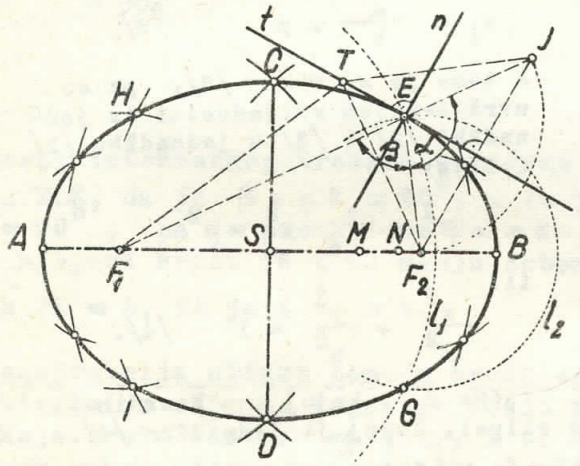
Istakne se koja god točka M na velikoj osi izmedju središta S i žarišta F_2. Uzme se zatim u šestilo dužina AM i njime opiše oko F_1 kružni luk l_1, a potom se uzme u šestilo ostatak velike osi MB i njime se opiše oko F_2 kružni luk l_2. Ta će se dva kružna luka presjeći u točkama E i G, koje su na elipsi, jer je $F_1E+F_2E = AM+ MB = AB$, a to važi i za točku G. Opiše li se zatim kružni luk oko F_2 s polumjerom AM, a oko F_1 s polumjerom MB, ti će se kružni lukovi presjeći u točkama H i J, koje su takodjer na elipsi.

Istakne li se sada na velikoj osi točka N, mogu se pomoću dužina AN i NB konstruirati na jednak način još četiri točke elipse.

Da bi se dobile krajnje točke C i D male osi elipse, opišu se oko F_1 i F_2 lukovi kružnica, kojima je polumjer SA = SB = a, pa se ti lukovi presijeku u točkama C i D.

Tangenta elipse u točki E konstruira se tako, da se nacrta simetrala t vanjskog kuta α provodnica F_1E i F_2E točke E. Da je ta simetrala kuta α doista tangenta elipse u točki E, uvjerit ćemo se na taj način, da ćemo dokazati, da na pravcu t nema drugih točaka elipse osim točke E.

Ako na produženju provodnice F_1F nanesemo dužinu EJ, koja je jednaka dužini EF_2, onda smo dobili dužinu F_1J, koja je duga 2a, i istokračni trokut EF_2J. Pravac t je simetrala toga trokuta, kao i njegove osnovice F_2J. Istaknimo sada na pravcu t koju god točku T i spojimo je s točkama F_1, F_2 i J. Budući je točka T na simetrali dužine F_2J, ona je jednako udaljena od točaka F_2 i J, pa je $TF_2 = TJ$. Kad bi točka T bila na elipsi, moralo bi biti $F_1T + F_2T = 2a$. Ta posljednja jednadžba ne može da postoji, jer u trokutu F_1JT mora zbroj dviju stranica biti veći od treće, pa mora biti $F_1T + TJ > F_1J$, a kako je $F_1J = 2a$, a $TJ = F_2T$, izlazi da je $F_1T + F_2T > 2a$, pa prema tome točka T nije na elipsi, ma koliko se ona po pravcu t približila točki E s lijeve ili s desne strane. Budući da pravac t ima s elipsom samo jednu zajedničku točku, i to točku E, on je tangenta elipse u toj točki, a točka E je njegovo diralište. Pravac n, koji ide točkom E okomito na tangentu t, zove se normala elipse u točki E.



Sl. 224.

Tangenta u nekoj točki elipse raspolavlja vanjski kut, a normala unutrašnji kut provodnica te točke.

C.- Konstrukcija elipse pomoću velike i male osi. Nacrtaj elipsu, kojoj je velika os AB = 60 mm, a mala os CD = 40 mm!

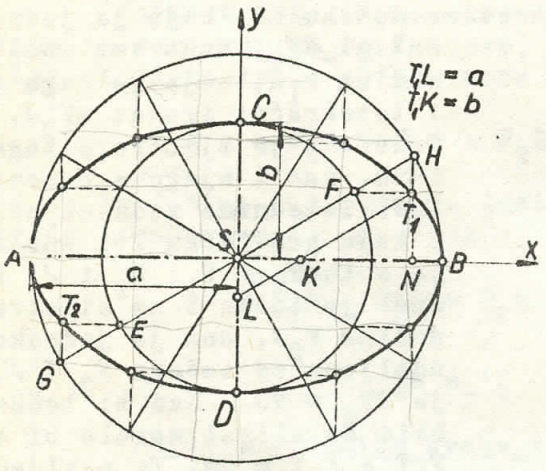
Nacrtaju se dva medju sobom okomita pravca, koji se sijeku u točki Prenese se na jedan pravac dužina SA = SB = 30 mm, a na drugi SC = SD = mm, pa su dužine AB i CD velika i mala os elipse, koju treba nacrtati. Budući da je $CF_1 = CF_2 = a$, ili $DF_1 = DF_2 = a$, /sl.223./, mogu se žarišta elipse odrediti tako, da se oko točke C ili D, opiše luk kružnice polumjera SA = 30 mm, pa će taj luk presjeći veliku os AB u žarištima F_1 i F_2.

Kad su žarišta elipse nadjena, može se odredjivanje pojedinih točaka te elipse nastaviti na način prikazan u čl. B.

Na drugi način može se ta elipsa konstruirati pomoću kružnica nad njezinom velikom i malom osi. Oko središta elipse opišu se dvije kružnice /sl. 225./, i to jedna, koja prolazi krajnjim točkama A i B velike osi, a druga, koja prolazi krajnjim točkama C i D male osi elipse. Središtem elipse nacrta se pravac, koji siječe manju kružnicu u točkama E i F, a veću u G i H. Povuku se zatim točkama manje kružnice usporednice s velikom osi, a točkama veće kružnice usporednice s malom osi elipse. Presjecišta T_1 i T_2 tih usporednica su dvije točke elipse, o čemu se možemo uvjeriti ovako: U pravokutnom koordinatnom sustavu, kojemu je ishodište S, a osi x i y, neka su x_1 i y_1 koordinate točke H, a x i y koordinate točke T_1. Kako je točka H na kružnici polumjera a, bit će

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 . \qquad /1/$$

Budući da su homologni odresci dviju vrsta medju sobom razmjerni, to se



Sl. 225.

$$\overline{NH} : \overline{NT_1} = \overline{SH} : \overline{SF} ,$$

ili

$$y_1 : y = a : b ,$$

ili

$$y_1 = \frac{a}{b} \cdot y \qquad /2/.$$

K tome je $x_1 = x$ /3/, pa se uvrštavanjem vrijednosti iz jednadžbi /2/ i /3/ u jednadžbu /1/ dobije:

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2$$

ili

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad /4/.$$

Točka T_1, kojoj smo koordinate bili označili sa x i y, nalazi se dakle na elipsi, kojoj je jednadžba /4/.

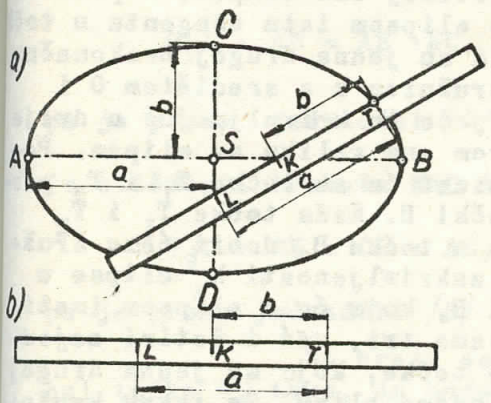
Ta jednostavna konstrukcija elipse pomoću kružnica nad njezinom velikom i malom osi potječe od Philippe de la Hire /1685/.

Ako se točkom T_1 povuče usporednica s dužinom SH, ona presiječe veliku os u točki K, a malu os u točki L. Iz paralelograma SLT_1H izlazi da je $LT_1 = SH = SA = a$, a iz paralelograma SKT_1F izlazi da je $KT_1 = SF = SC = b$. Na tome svojstvu elipse temelje se dvije slijedeće njezine konstrukcije:

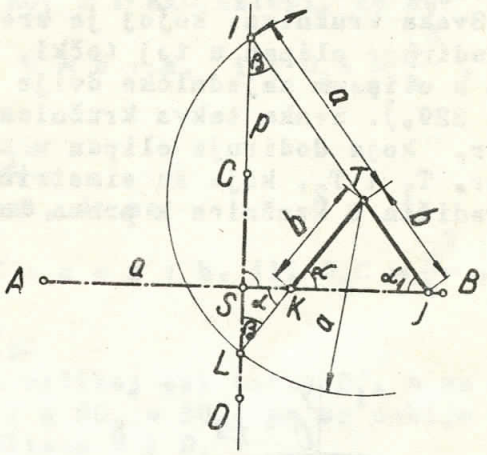
St. D.- Konstrukcija elipse pomoću odreska papira. Pojedine točke elipse / sl.226./, kojoj je velika os $AB = 2a = 50$ mm, a mala os $CD = 2b = 30$mm mogu se odrediti ovako: Na rubu odreska crtaćeg papira označe se, kao na sl. 226.b, točke T, K i L tako, da bude $TK = b = 15$ mm, a $TL = a = 25$ mm. Ako se sada taj odrezak papira položi tako /sl.226.a/, da mu točka K bude na velikoj osi, a točka L na maloj osi elipse, onda će, prema gore istaknutom svojstvu, biti točka T na elipsi, kojoj je AB velika, a CD mala os. Pomicanjem toga odreska papira tako, da mu je stalno točka K na velikoj osi, a točka L na maloj osi elipse, opisat će točka T traženu elipsu.

E.- Konstrukcija male osi elipse, kojoj je zadana velika os i jedna točka. Zadana je velika os elipse AB i točka T_1 neka se konstruira mala os te elipse! / sl.227./

Poloviштem S velike osi elipse povuče se pravac p okomito na tu os. iječe se zatim taj pravac u točkama I i L lukom kružnice, kojoj je središ- točki T, a polumjer r = SA = SB = a. Na kraju se nacrtaju pravci [TL] TI]. Ako veliku os AB siječe pravac [TL] u točki K, a pravac I] u točki J, onda je dužina TK, kao i dužina TJ, jednaka polovini ma- si SC = SD = b. Da je TK = b, to izlazi iz svojstva elipse, koje je do- no na kraju čl. C, a da je i TJ = b, to možemo dokazati ovako: Ako kuto-



Sl. 226.

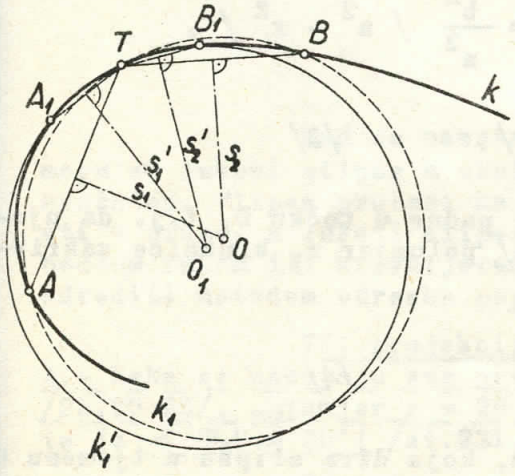


Sl. 227

na osnovci istokračnog trokuta označimo s β , onda izlazi iz pravokut- trokuta SLK, da je $\beta + \alpha = 90^0$, a iz pravokutnog trokuta SJI, da je $\beta + \alpha_1 = 90^0$, pa je prema tome $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$. Trokut KJT dakle je istokra- , pa su njegovi kraci TK i TJ medju sobom jednaki.

je pak TK = b, to je i TJ = b.

F.- Konstrukcija elipse pomoću kružnica zakrivljenosti njezinih tjemena. oću konstrukcija elipse, koje smo dosad upoznali, dobijamo pojedine točke lje, koje treba olovkom spojiti, i to slobodnom rukom. Budući da crta- slobodnom rukom nije svatko vješt, naučit ćemo, kako se neki dijelovi e- e mogu nacrtati šestilom.

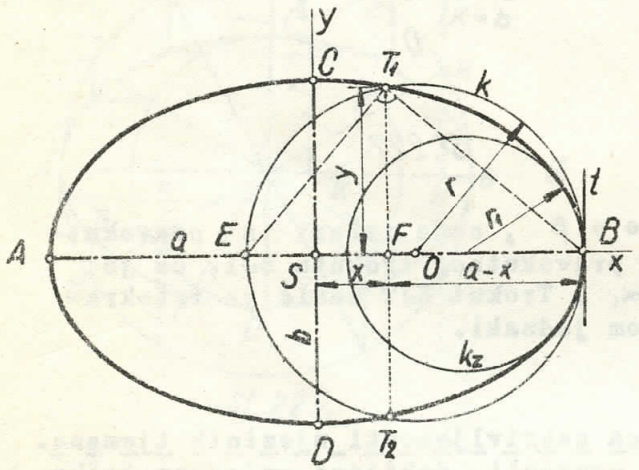


Sl. 228.

1. Kružnica zakrivljenosti. S koje god tri točke A, T i B krivulje k, koje nisu na istom pravcu, potpuno je odredjena kružnica k_1 /sl.228/. Njeno središte O nalazi se u presjecištu simetrale s_1 tetive AT sa simetralom s_2 tetive BT. Vidimo, da se lukovi $\overset{\frown}{AT}$ i $\overset{\frown}{BT}$ kružnice k_1 malo razlikuju od lukova $\overset{\frown}{AT}$ i $\overset{\frown}{BT}$ krivulje k. Kad bi se točke A i B približile točki T, i to prva došla u položaj A_1, a druga u položaj B_1, tad bi točke A_1, T i B_1 odredile novu kružnicu k_1' , kojoj je središte $O_1 = /s_1' \; s_2' /$. Luk A_1TB_1 kružnice k_1' skoro se poklapa s lukom A_1TB_1 krivulje k. Za praktično crtanje krivulje k možemo njezin luk A_1TB_1 nadomjestiti lukom A_1TB_1 kružnice k_1' . Ukoliko bi se

točka A_1 i B_1 još više približile točki T, utoliko bi se luk A_1TB_1 kružnice k_1' bolje poklapao s lukom A_1TB_1 krivulje k. Kad bi točke A_1 i B_1 bile u neposrednoj blizini točke T, one bi odredile neku kružnicu k_z, koja se zove kružnica zakrivljenosti ili oskulacije krivulje u točki T. Luk kružnice zakrivljenosti u okolini točke T najbolje se poklapa s lukom krivulje k u toj okolini.

Polumjer kružnice zakrivljenosti neke krivulje u svakoj njezinoj točki, zatim koordinate njezinog središta, kao i jednadžbe te kružnice, mogu se izračunati pomoću infinitezimalnog računa. Za elipsu mogu se polumjeri kružnica zakrivljenosti njezinih tjemena izračunati i bez infinitezimalnog računa ovako: Svaka kružnica, kojoj je središte na velikoj osi elipse, a prolazi točkom B, dodiruje elipsu u toj točki, t.j. ima s elipsom istu tangentu u točki B, ili ima s elipsom zajedničke dvije točke, koja su jedna drugoj beskonačno blizu (sl. 229.). Svaka takva kružnica, na pr. kružnica k s središtem O i polumjerom r, koja dodiruje elipsu u točki B, siječe tu krivulju još u dvije točke, na pr. T_1 i T_2, koje su simetrične s obzirom na veliku os elipse. Pomicanjem središta O kružnice k prema točki B, pomicat će se točke T_1 i T_2 prema točki B. Kada točke T_1 i T_2 padnu u točku B, dobit ćemo kružnicu zakrivljenosti k_z elipse u točki B, koja će s elipsom imati ne samo tri, već i četiri zajedničke točke, koje su jedna drugoj beskonačno blizu. Za takvu kružnicu k_z kažemo da elipsu hiperoskulira u točki B.



Sl. 229.

Ako točka T_1 ima u pravokutnom koordinatnom sustavu /xSy/ koordinate x i y, a osi elipse su 2a i 2b, onda je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ili} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}/a^2 - x^2/. \qquad /1/$$

Budući da je FT_1 visina pravokutnog trokuta EBT_1, to je FT_1 $EF.FB$, ili

$$y^2 = [\ 2r - /a-x/\ ] \cdot /a-x/. \qquad /2/$$

Iz jednadžbe /1/ i /2/ izlazi da je

$$[\ 2r - /a - x/\ ] \cdot /a-x/ = \frac{b^2}{a^2}\ /\ a^2 - x^2\ /\ ,$$

ili

$$2r - /\ a - x\ / = \frac{b^2}{a^2}\ /\ a + x\ /. \qquad /3/$$

Pustimo li, da točka T_1, pomičući se po elipsi, padne u točku B, t.j. da njezina apscisa $x \to a$, dobit ćemo iz jednadžbe /3/ polumjer r_1 kružnice zakrivljenosti k_z elipse u tjemenu B:

$$r_1 = \lim_{T_1 \to B} r = \frac{b^2}{a} \qquad /4/$$

Istim razmatranjem, a u vezi s jednom kružnicom, koja dira elipsu u tjemenu C, dobije se polumjer r_2 kružnice zakrivljenosti k_z elipse u tjemenu C:

$$r_2 = \frac{a^2}{b} \qquad /5/$$

2. Konstrukcija kružnica zakrivljenosti tjemena elipse.

Na temelju formula /4/ i /5/ mogu se konstruktivno odrediti središta kružnica zakrivljenosti elipsinih tjemena ovako: Krajnjom točkom A velike osi /sl.230./ povuče se usporednica s malom osi, a krajnjom točkom C male osi povuče se usporednica s velikom osi, pa se dobije pravokutnik ASCE sa stranicama a i b. Povuče se zatim točkom E okomica na dijagonalu AC toga pravokutnika i njome presječe veliku os elipse u točki O_1, a malu os, ili njeno produženje u točki O_2. Može se lako dokazati, da je točka O_1 središte zakrivljenosti elipse u točki A, a točka O_2 je središte kružnice zakrivljenosti elipse u točki C.

Iz sličnosti trokuta AO_1 E i EAC izlazi, da se

$$O_1A : AE = AE : EC, \text{ ili } O_1A : b = b : a, \text{ ili } O_1A = \frac{b^2}{a},$$

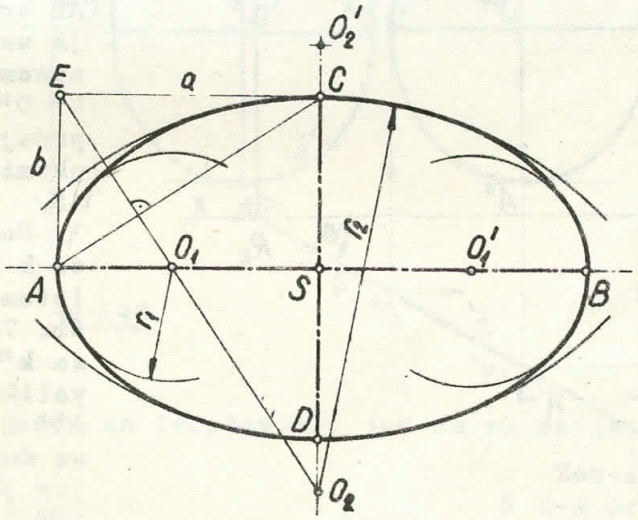
pa je prema jednadžbi /4/ $\underline{O_1A = r_1}$.

Iz sličnosti trokuta EAC i CEO_2 izlazi, da se

$$O_2C : CE = CE : AE, \text{ ili } O_2C : a = a : b, \text{ ili } O_2C = \frac{a^2}{b},$$

pa je prema jednadžbi /5/ $\underline{O_2C = r_2}$.

Na kraju se označi na velikoj osi točka O_1', a na maloj osi točka O_2' tako, da bude $SO_1 = SO_1'$, a $SO_2 = SO_2'$, pa se dobiju središta kružnica zakrivljenosti za tjemena elipse B i D.



Sl. 230.

Kad se nacrtaju kružnice zakrivljenosti tjemena elipse, mogu se lukovi elipse u okolini tih tjemena nadomjestiti lukovima tih kružnica. Elipsa prolazi na četiri mjesta iz jedne kružnice zakrivljenosti u drugu, a lukovi elipse, koji su na tim mjestima, nacrtaju se slobodnom rukom ili krivuljarom. Nekoliko točaka svakoga toga luka može se odrediti metodom odreska papira /čl. D/.

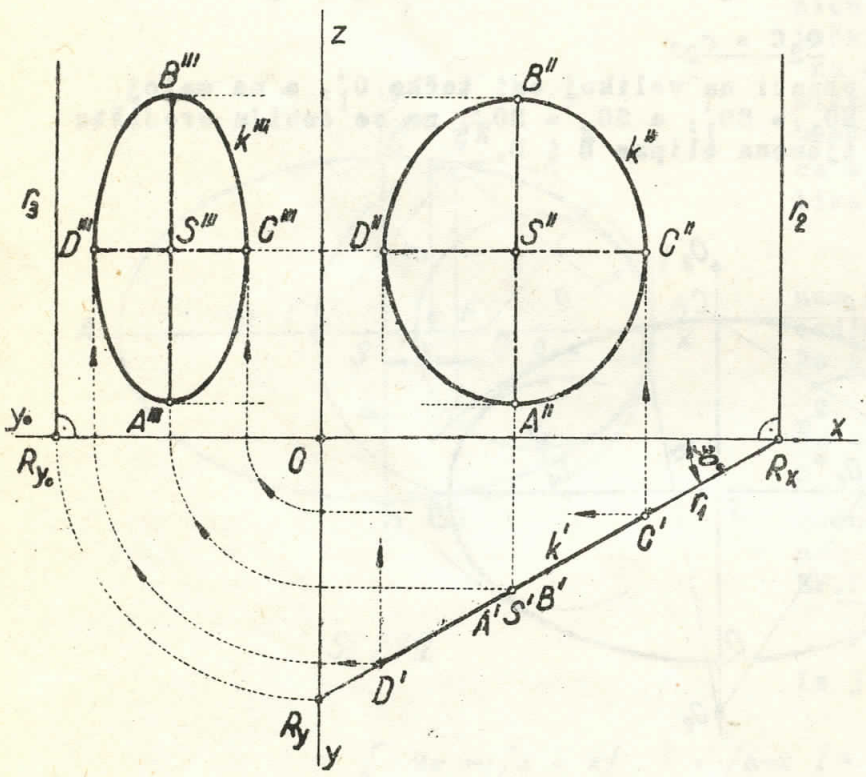
77. Projekcije kružnice, koja je u projicirajućoj ravnini A.- Neka se nacrtaju sve projekcije kružnice k, kojoj je središte S /25, 20, 25/, polumjer r = 20 mm, ako je njezina ravnina P okomita na Π_1, te je $\sphericalangle \Pi_2 P = 30°$! /sl.231./.

Najprije se nacrtaju sve tri projekcije S', S'' i S'''

točke S, i tragovi ravnine kružnice. Točkom S' povuče se zatim prvi trag r_1 tako, da bude $\sphericalangle x\, r_1 = 30^0$, pa se pomoću točke $R_x = (r_1\, x)$, odnosno $R_y = (r_1\, y)$, nacrta drugi trag r_2, odnosno treći trag r_3, prve projicirajuće ravnine P, u kojoj se kružnica nalazi.

Zamisle se zatim dva promjera kružnice, jedan AB, koji je okomit na ravnini Π_1, a drugi CD, koji je usporedan s tom ravninom, pa se nacrtaju sve tri projekcije tih promjera. Tlocrt promjera AB je točka A' ≡ B' ≡ S', dok je njegov nacrt A'' B'', kao i njegov bokocrt A''' B''', usporedan s osi z /S'' A'' = S'' B'' = 20 mm, S''' A''' = S''' B''' = = 20 mm/. Tlocrt promjera CD je dužina C'D'/S'C' = S'D' = 20 mm/, koja je u prvom tragu r_1 ravnine P, dok je njegov nacrt C'' D'', kao i bokocrt C''' D''' okomit na osi z. Krajnje točke nacrta i bokocrta promjera CD odrede se pomoću krajnjih točaka tlocrta toga promjera, kako je to slikom prikazano.

Budući da svaki ravan lik, koji je u prvoj projicirajućoj ravnini, mora svoj tlocrt imati u prvom tragu te ravnine / čl. 29. A/, to se tlocrt k' kružnice k nalazi u prvom tragu r_1 ravnine P i poklapa se s dužinom C'D'.



Sl. 231.

Nacrt kružnice k mora prema pravilu iz čl. 75. biti elipsa k'', kojoj je velika os dužina A'' B'', a mala os dužina C'' D'', jer je dužina A'' B'' nacrt onog promjera AB kružnice, koji je usporedan s ravninom Π_2, a dužina C'' D'' nacrt onog promjera CD, koji je okomit na promjeru AB.

Bokocrt kružnice k mora prema istom pravilu iz čl. 75. biti elipsa k''', kojoj je velika os dužina A''' B''', a mala os dužina C''' D''', jer je dužina A''' B''' bokocrt onoga promjera AB kružnice, koji je usporedan s ravninom Π_3, a dužina C''' D''' je bokocrt onoga promjera CD, koji je okomit na promjeru AB.

Tragovi r_2 i r_3 ravnine P nisu bili potrebni pri konstrukciji nacrta i bokocrta kružnice, pa ih se ubuduće može ispuštati

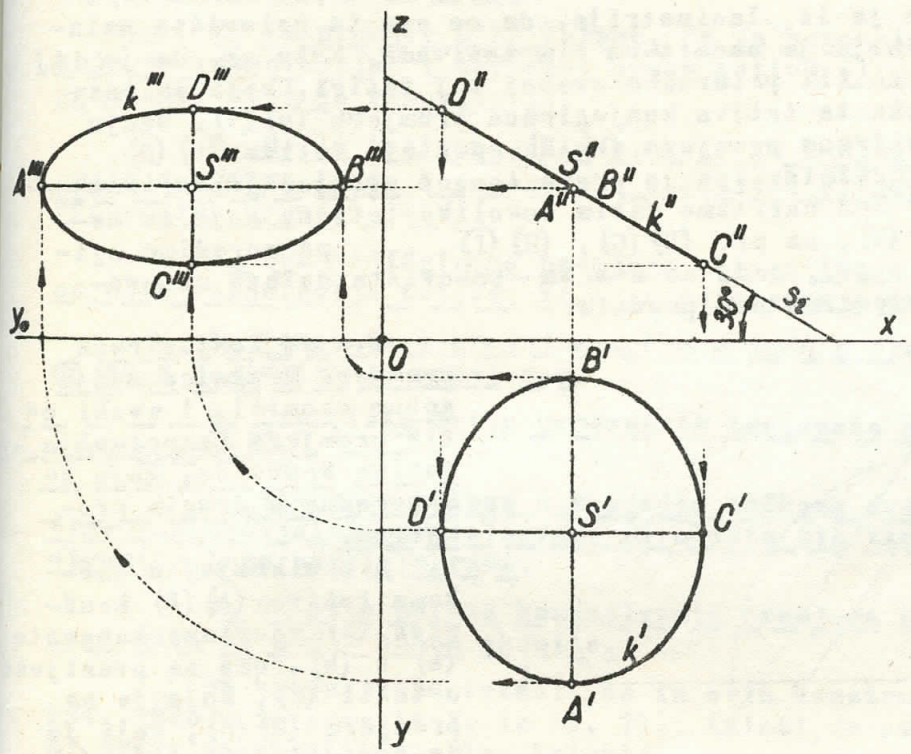
B.- Neka se nacrtaju projekcije kružnice k, kojoj je središte S/25, 25, 20/, polumjer r = 20 mm, ako je njezina ravnina Σ okomita na Π_1, te je $\sphericalangle \Sigma\Pi_1 = 30^0$! /sl.232./

Ravnina kružnice sada je druga projicirajuća ravnina Σ Njezin drugi trag s_2 ide točkom S'' tako, da je $\sphericalangle s_2 x = 30^0$, a njezin prvi trag s_1, kao i treći trag s_3, može se izostaviti, jer su za konstrukciju projekcija kružnice nepotrebni.

Zamislimo sada dva promjera kružnice AB i CD, od kojih je AB okomit na ravnini Π_2 , a CD usporedan s tom ravninom, pa nacrtajmo njihove projekcije. Nacrt promjera AB je točka A'' ≡ B'' ≡ S'' , njegov je tlocrt A'B'/S'A' = S'B' = 20 mm/ okomit na osi x, a njegov bokocrt A'''B''' /S''' A''' = = S''' B''' = 20 mm/ okomit je na osi z.

Nacrt promjera CD je dužina C'' D'' /S'' C'' = S'' D'' = 20 mm/, koja je u drugom tragu s_2 ravnine Σ , dok je njegov tlocrt C'D' usporedan s osi x, a bokocrt C''' D''' usporedan s osi z. Krajnje točke tlocrta i bokocrta promjera CD odrede se pomoću krajnjih točaka nacrta toga promjera, kako je to slikom prikazano.

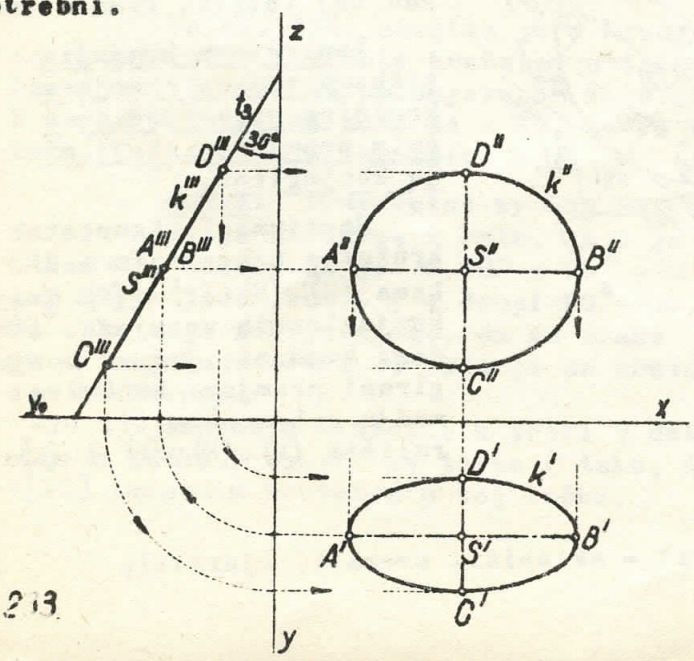
Prema pravilu iz čl. 29.B. mora nacrt k'' kružnice k biti u drugom tragu s_2 ravnine Σ, pa se on poklapa s dužinom C'' D'' . Prema pravilu iz čl.75. bit će tlocrt kruznice elipsa k', kojoj je dužina A'B' velika os, a dužina C'D' mala os, dok će bokocrt te kružnice biti elipsa k''', kojoj je dužina A''' B''' velika, a dužina C''' D''' mala os.



Sl. 232.

C.- Neka se nacrtaju projekcije kružnice k, kojoj je središte S/25,15,20/, polumjer r=15 mm, ako je njezina ravnina T okomita na Π_3 , tc je $\sphericalangle T\Pi_2 = 30^0$ /sl.233/

Budući da je ravnina kružnice sada treća projicirajuća ravnina T, mora se najprije nacrtati njezin treći trag t_3, koji ide točkom S''' tako, da je $\sphericalangle t_3 z = 30^0$, a njezin prvi trag t_1 i drugi trag t_2, mogu se izostaviti, jer su za daljnju konstrukciju nepotrebni.



Sl. 233

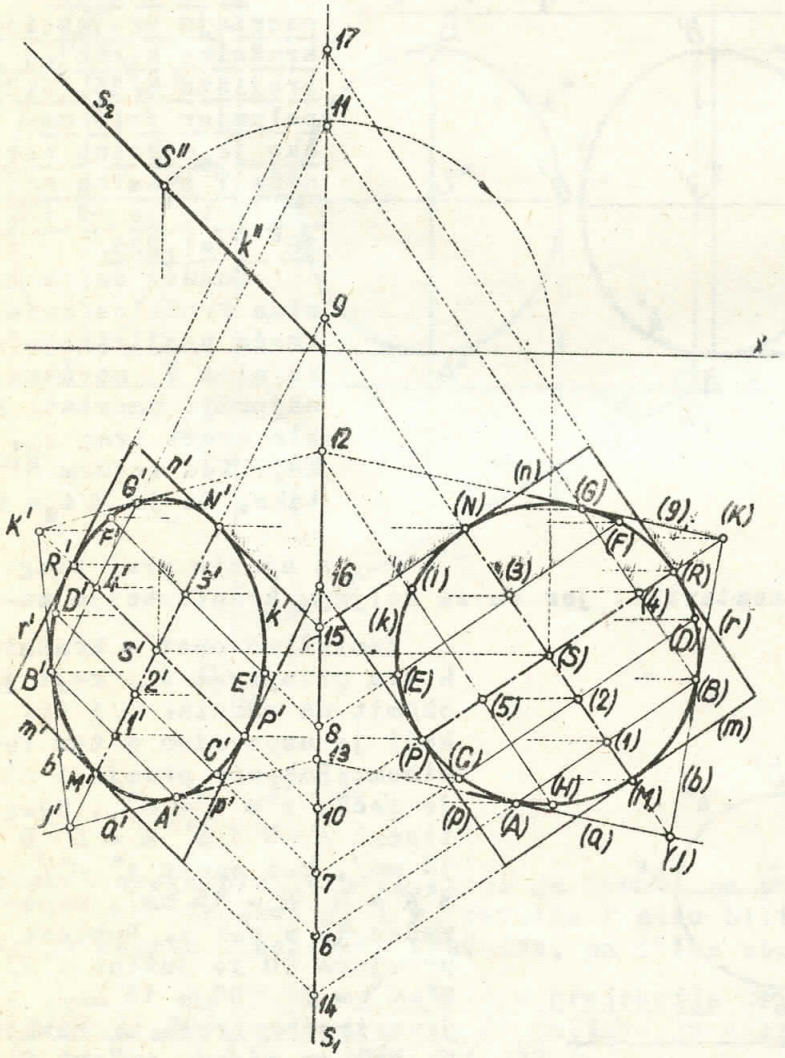
Zamislimo opet u kružnici k dva promjera: AB, koji je okomit na ravnini Π_3 i CD, koji je usporedan s tom ravninom. Bokocrt promjera AB je točka A''' ≡ B''' ≡ S''' , njegov tlocrt A' B' / S' A' = S' B' = 15 mm/, kao nacrt A'' B''/ S''A'' = S'' B'' = 15 mm/, usporedan je s osi x. Bokocrt promjera CD je dužina C'''D'''/ S''' C''' = S''' D''' = 15 mm/, koja je u trećem tragu t_3 ravnine T, dok je njegov tlocrt C' D' i nacrt C'' D'' okomit na osi x. Pomoću krajnjih točaka bokocrta promjera CD odrede se krajnje točke tlocrta i nacrta toga promjera, kako je to slikom pokazano.

Bokocrt k''' kružnice k mora prema pravilu iz čl. 59. A biti u trećem tragu t_3 ravnine T, pa se poklapa s dužinom C''' D''' .

Prema pravilu iz čl. 75. tlocrt je kružnice k elipsa k', kojoj je dužina A'B' velika os, a dužina C'D' mala os, dok je nacrt te kružnice elipsa k'' , kojoj je dužina A''B'' velika, a dužina C''D'' mala os.

St. 78. Konjugirani [1] ili pridruženi promjeri elipse.

A. Pojam konjugiranih promjera elipse. U drugoj projicirajućoj ravnini Σ , nalazi se kružnica, kojoj je središte S, a polumjer r = 20 mm /sl.234./. Preložimo li tu kružnicu oko prvoga traga s_1 ravnine Σ na ravninu Π_1 , dobijemo kružnicu (k). U toj kružnici nacrtajmo sada nekoliko paralelnih tetiva (A) (B), (C) (D), (E) (F), ... i odredimo njihova polovišta (1), (2), (3), ... Poznato je iz planimetrije, da se sva ta polovišta nalaze na promjeru (M) (N), koji je okomit na tim tetivama. Kaže se, da je taj promjer (M) (N) konjugiran ili pridružen svakoj toj tetivi, koju on raspolavlja, ili da je svaka ta tetiva konjugirana promjeru (M) (N). Medju tetivama, koje su konjugirane promjeru (M) (N), postoji tetiva (P) (R), koja prolazi središtem kružnice, pa je prema tome i promjer (P) (R) konjugiran promjeru (M) (N). Kad nacrtamo zatim nekoliko tetiva, koje su usporedne s promjerom (M) (N), na pr. (B) (G), (H) (I), ..., pa odredimo njihova polovišta (4), (5), ..., onda se sva ta polovišta nalaze na promjeru (P) (R). Iz toga izvodimo ovo pravilo:



Sl. 234.

Dva su konjugirana promjera kružnice medju sobom okomiti, i svaki od tih promjera raspolavlja sve tetive kružnice, koje su usporedne s drugim promjerom.

Ako u krajnjim točkama tetive (A) (B) kružnice (k) nacrtamo tangente (a) i (b), one se presijeku u točki (J), koja je na promjeru (M) (N), koji je konjugiran tetivi (A) (B). Tako isto se tangente (b) i (g) u krajnjim točkama tetive (B) (G) sijeku u jednoj točki (K) promjera (P) (R), koji je konjugiran toj tetivi. Prema tome:

Tangente u krajnjim točkama svakog promjera kružnice usporedne su s onim promjerom, koji mu je konjugiran.

Nacrtamo li tangente kružnice u krajnjim točkama (M), (N), (P) i (R) dvaju konjugiranih promjera, dobit ćemo kvadrat, jer su konjugirani promjeri kružnice medju sobom okomiti. Dirališta (M), (N), (P) i (R)

1) Prema latinskom glagolu "conjugare" = sklopiti, svezati, ujarmiti, upregnuti zajedno.

tih tangenata raspolavljaju stranice toga kvadrata.

Ako sada rotacijom oko prvoga traga s_1 ravnine Σ dovedemo kružnicu (k), i sve konstrukcije u vezi s njom, u ravninu Σ, pa odredimo njezin tlocrt, dobit ćemo elipsu k' i sve odgovarajuće konstrukcije u vezi s tom elipsom. Budući da se pri normalnom projiciranju ne mijenja omjer u kojemu neka točka dijeli neku dužinu /čl. 17.b/, te se tangenta neke krivulje projicira kao tangenta projekcije te krivulje, možemo iz slike 234. izvesti nekoliko važnih svojstava elipse, koja nam za buduće konstrukcije elipse mogu biti od osobite koristi.

1. Nacrtamo li u elipsi nekoliko usporednih tetiva, i odredimo li polovišta svake te tetive, sva će polovišta 1', 2', 3', ... biti na jednom promjeru M'N' elipse.

2. Za promjer M'N' kažemo, da je konjugiran svakoj tetivi elipse, koju on raspolavlja, i obrnuto: Svaka tetiva elipse konjugirana je onom promjeru, koji je raspolavlja.

3. Medju tetivama elipse, koje su konjugirane promjeru M'N', postoji tetiva P'R', koja prolazi središtem elipse, pa je i promjer P'R' konjugiran promjeru M'N'.

4. Dva konjugirana promjera elipse imaju to svojstvo, da svaki od njih raspolavlja tetive, koje su usporedne s drugim promjerom.

5. Tangente u krajnjim točkama jednog promjera elipse paralelne su s konjugiranim promjerom.

6. Dirališta dviju usporednih tangenata elipse odredjuju jedan njezin promjer.

7. Tangente elipse u krajnjim točkama dvaju konjugiranih promjera čine tangencijalni paralelogram. Dirališta tih tangenata raspolavljaju stranice toga paralelograma.

8. Od svih parova konjugiranih promjera elipse, samo su velika i mala os medju sobom okomite.

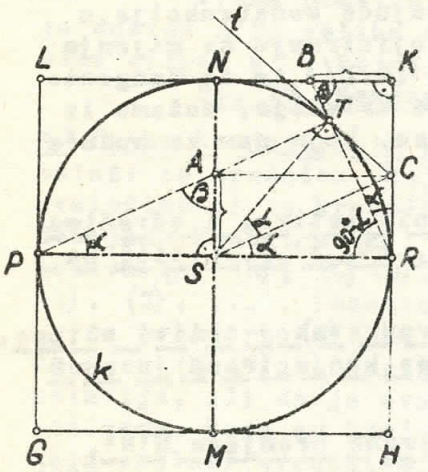
Na kraju treba istaći, da iz svih konstruktivnih linija na sl. 234., kao i iz pravila 2. iz čl. 71., izlazi, da su kružnica (k) i elipsa k' dvije perspektivno afine krivulje.

B.- Konstrukcija elipse iz para konjugiranih promjera. Kad je zadan par konjugiranih promjera elipse, možemo konstruirati koliko god hoćemo točaka elipse i u svakoj od njih odrediti tangentu. Tu ćemo konstrukciju izvesti iz odgovarajuće konstrukcije točaka i tangenata kružnice.

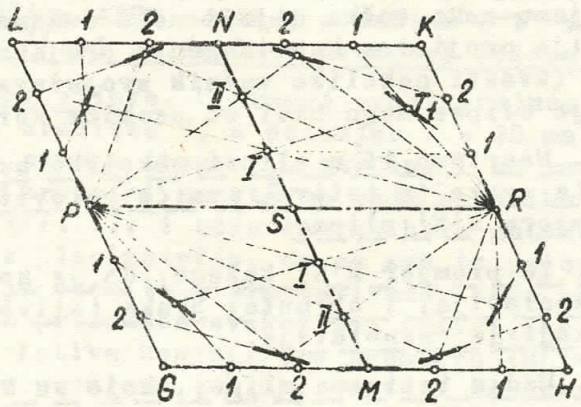
Na sl. 235. nacrtan je u kružnici k promjer MN, koji je okomit na promjeru PR. Tangente kružnice u točkama N i R sijeku se u točki K. Označimo li sada na polumjeru SN koju god točku A, a na tangenti u točki N točku B tako, da bude SA = KB, to će se zrake [PA] i [RB] sjeći u točki T, koja je na kružnici k.

Dokaz: Pravokutni trokut SAP i KBR su sukladni, jer se poduđaraju u dvije stranice i kutu, koji je medju njima, pa je $\sphericalangle$ SPA = $\sphericalangle$ KRB = α. Budući da je $\sphericalangle$ TRP = $90^0 - \alpha$, to je trokut PTR pravokutan, jer mu je jedan kut α, a drugi $90^0 - \alpha$, pa je njegov treći kut $\sphericalangle$ PTR = 90^0. Iz toga zaključujemo, da su zrake [PA] i [RB] medju sobom okomite, pa se sijeku u točki T, koja je na kružnici nad polumjerom PR /Thalesova kružnica/.

Tangenta kružnice u točki T dobije se ovako: Na tangenti kružnice u točki R označi se točka C tako, da bude SA = RC, pa je pravac t = [TC] tangenta kružnice u toj točki.



Sl. 235.



Sl. 236.

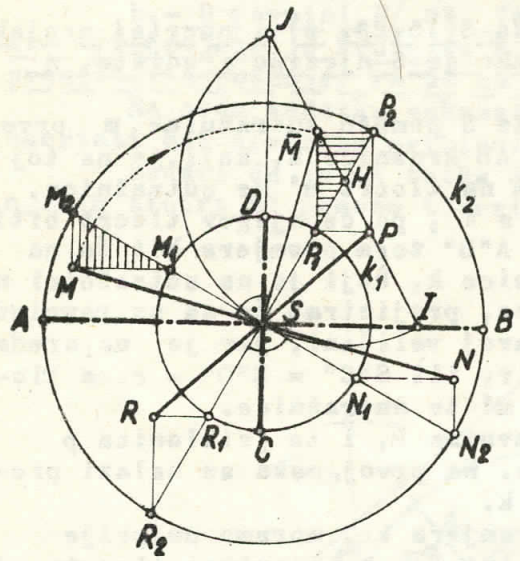
Dokaz: Pravokutni trokuti SAP i RCS su sukladni, jer se poduđaraju u dvije stranice i pravom kutu, koji je medju njima, pa je ∢ SPA = ∢ RSC = α . Budući da je ∢RST = 2 ∢ RPT, ili ∢ RST = 2α , jer su to središnji i obodni kut nad istim lukom $\overset{\frown}{RT}$, to je ∢ TSC = ∢ RSC = α . Iz toga izlazi, da su trokuti RSC i TSC sukladni, jer se poduđaraju u dvije stranice i kutu medju njima, pa prema tome pravom kutu u vrhu R odgovara pravi kut u vrhu T, a to znači, da je pravac t = [TC] tangenta kružnice u točki T.

Tu konstrukciju točaka kružnice i njezinih tangenata možemo afino primijeniti na elipsu. Paru konjugiranih promjera MN i PR kružnice /sl.235./, koji su medju sobom okomiti i jednaki, odgovara općenito par konjugiranih promjera MN i PR elipse / sl. 236./, koji nisu medju sobom okomiti, a niti su jednaki. U konstrukciji na sl. 235. dijeli točka A dužinu SN u istom omjeru kao što točka B dijeli dužinu KN, a kako su u perspektivno afinim likovima djelišni omjeri invarijantni / čl. 39./, treba da točka I, odnosno II, na sl. 236. dijeli dužinu SN u istom omjeru kao što točka 1, odnosno 2, dijeli dužinu KN.

Kad je zadan par konjugiranih promjera elipse, na pr. MN i PR, onda treba najprije nacrtati dodirni romboid GHKL. Stranice GL i HK su usporedne s promjerom MN, a stranice GH i LK su usporedne s promjerom PR. Podijele se zatim dužine SM, SN, MG, MH, NL i NK na isti broj jednakih dijelova, na pr. na 3 dijela. Budući da djelišna točka I dužine SN dijeli tu dužinu u omjeru SI : NI = $-\frac{1}{2}$, a u istom djelišnom omjeru dijeli dužinu KN njezina točka 1 (K1 : N1 = $-\frac{1}{2}$), to će se zrake [PI] i [R1] sjeći u točki T, koja je na elipsi. Ako se sada točku T spoji s točkom 1, koja dijeli dužinu RK u istom djelišnom omjeru / R1 : K1 = $-\frac{1}{2}$/, dobije se tangenta elipse u točki T. Ostale se točke i tangente elipse dobiju na isti način. Pri crtanju elipse slobodnom rukom, koja prolazi dobivenim točkama, treba paziti na to, da elipsa mora dodirivati romboid GHKL u polovištima M,R, N i P njegovih stranica.

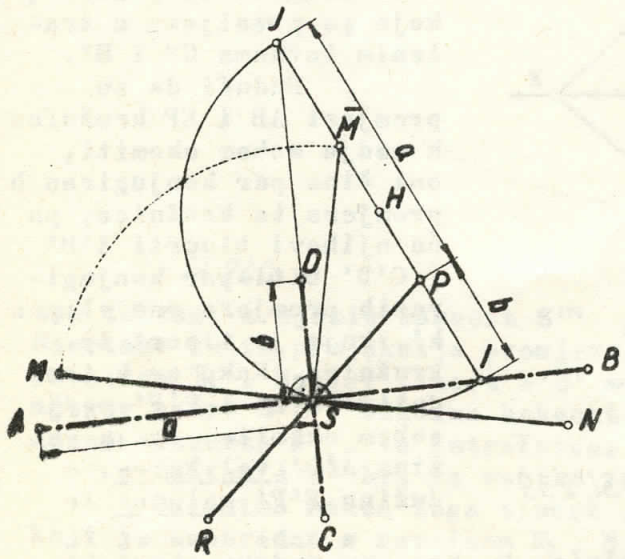
Da bi se izbjeglo crtanje elipse slobodnom rukom, kad su zadana dva njezina konjugirana promjera, mogu se prvo konstruirati osi te elipse, a zatim je nacrtati pomoću kružnica zakrivljenosti njezinih tjemena.

St. C.- Konstrukcija osi elipse iz para njezinih konjugiranih promjera. Ta se konstrukcija izvodi iz konstrukcije elipse pomoću kružnica nad njezinom velikom i malom osi / čl. 76.C/.



Sl. 237.

Znademo da je elipsa, koja je zadana svojom velikom osi AB i malom osi CD/ sl.237./, perspektivno afina s kružnicom k_2, kojoj je promjer AB / čl.75./. Ako prema tome za koji god par konjugiranih promjera te kružnice, na pr. za par M_2N_2 i P_2R_2 / $M_2N_2 \perp P_2R_2$/, konstruiramo u toj perspektivnoj afinosti odgovarajuće perspektivno afine dužine, onda time dobijemo par konjugiranih promjera MN i PR te elipse. Krajnje točke M,N, P i R tih promjera konstruiraju se kao na sl. 225., a pri tome se dobiju dva pravokutna trokuta MM_1M_2 i PP_2P_1, koji su sukladni, jer se podudaraju u hipotenuzama, i u kutovima na tim hipotenuzama. Okrenemo li sada polumjer SM_2 kružnice k_2 i polumjer SM elipse, skupa s pravokutnim trokutom MM_1M_2, oko središta S za kut od 90°, dobit ćemo dužine $S P_2$, $S\bar{M}$ i pravokutni trokut $\bar{M}P_1P_2$, koji sa sukladnim pravokutnim trokutom PP_2P_1 čini pravokutnik $PP_2\bar{M}P_1$, kojemu su stranice usporedne s osima elipse. Jedna dijagonala toga pravokutnika ide središtem S elipse, a druga siječe osi elipse u točkama I i J. Budući da su trokuti $H\bar{M}P_1$ i HP_1P istokračni, jer se dijagonale pravokutnika raspolavljaju, to su istokračni i trokuti HJS i HSI. Iz toga slijedi da su točke J, S i I jednako udaljene od točke H, pa se prema tome one nalaze na kružnici, kojoj je točka H središte, a koja prolazi točkom S. Kako je $SP_2 = a$, to je $JP = a$, a kako je $SP_1 = b$, to je $IP = b$. Iz toga izlazi ova konstrukcija velike i male osi elipse iz para konjugiranih promjera, koju je izveo švicarski nastavnik gradjanske škole David Rytz god. 1845.



Sl. 238.

U središtu S elipse /sl. 238./, koja je zadana parom konjugiranih promjera MN i PR, uzdigne se okomica na jedan promjer, na pr. $S\bar{M} \perp MN$, pa se učini $S\bar{M} = SM$. Spoji se zatim točka $\bar{M}$ s bližnjom krajnjom točkom P drugog promjera i dobije se pravac $[\bar{M}P]$. Opiše se zatim oko polovišta H dužine $\bar{M}P$ kružnica preko središta elipse S i njome se presiječe pravac $[\bar{M}P]$ u točkama I i J. Na pravcu [SI] nalazi se velika os, a na pravcu [SJ] mala os elipse, a dužina PJ ili $\bar{M}I$ jednaka je polovini velike osi SA ili SB,

dok je dužina PI ili MJ jednaka polovini male osi SC ili SD te elipse.

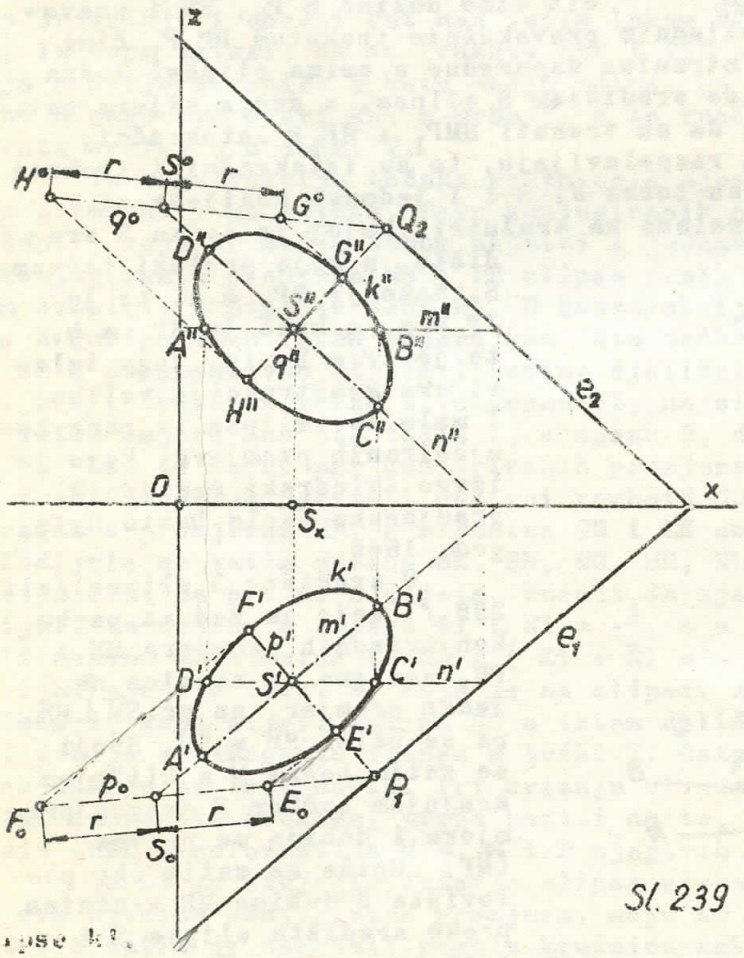
79. Projekcije kružnice, koja je u općoj ravnini

A.-U ravnini E (67, 58,61) nalazi se točka S(15,23, z) i nacrtaj projekcije kružnice k, koja je u toj ravnini, ako je S njezino središte, a polumjer r = 15 mm! / sl. 239./

Nacrtajmo najprije nacrt S" točke S pomoću sutražnice m prvog traga, koju položimo tom točkom. Promjer AB kružnice k, koji je na toj sutražnici, projicirat će se na ravninu Π_1 na tlocrt m' te sutražnice, i to u pravoj veličini, jer je usporedan s Π_1, pa će njegov tlocrt biti A'B' = 2 r, ili S'A' = S'B' = r, a nacrt A"B" toga promjera bit će na nacrtu m"-te sutražnice. Promjer CD kružnice k, koji je na sutražnici n drugoga traga, koja ide središtem kružnice, projicirat će se na ravninu Π_2 na nacrt n" te sutražnice, i to u pravoj veličini, jer je usporedan s Π_2, pa će njegov nacrt biti C"D" = 2 r, ili S"C" = S"D" = r, a tlocrt C'D' toga promjera bit će na tlocrtu n' te sutražnice.

Točkom S idu dvije priklonice ravnine E, i to priklonica p prvoga traga i priklonica q drugoga traga. Na prvoj neka se nalazi promjer EF, a na drugoj promjer GH kružnice k.

Da bismo odredili tlocrt E'F' promjera EF, moramo najprije nacrtati preložaj p_0 priklonice p na ravnini Π_1 oko njezinog tlocrta p'. Ako je $S'S_0 \perp p'$, a $S'S_0 = S_x S''$, onda je pravac $[S_0 P_1]$ taj preložaj p_0. Na pravcu p_0 označimo zatim točke E_0 i F_0 tako, da bude $S_0 E_0 = S_0 F_0 = r$, pa povučemo točkama E_0 i F_0 okomice na pravac p', koje ga presijeku u traženim točkama E' i F'.



Sl. 239

Isto tako, a da bismo našli nacrt G"H" promjera GH kružnice k, moramo najprije nacrtati preložaj q_0 priklonice q na ravnini Π_2 oko njezinog nacrta q". Ako je $S"S^\circ \perp q"$, a $S"S^\circ = S_x S'$, onda je pravac $[S^\circ Q_2]$ taj preložaj q°. Na pravcu q° učinimo zatim $S^\circ G^\circ = S^\circ H^\circ = r$, pa povučemo točkama G° i H° okomice na pravac q", koje ga presijeku u traženim točkama G" i H".

Budući da su promjeri AB i EF kružnice k medju sobom okomiti, oni čine par konjugiranih promjera te kružnice, pa će njihovi tlocrti A'B' i C'D' biti par konjugiranih promjera one elipse k', koja je tlocrt te kružnice. Kako su k tome dužine A'B' i E'F' medju sobom okomite, to je dužina A'B' velika os, a dužina E'F' mala os te elipse k'.

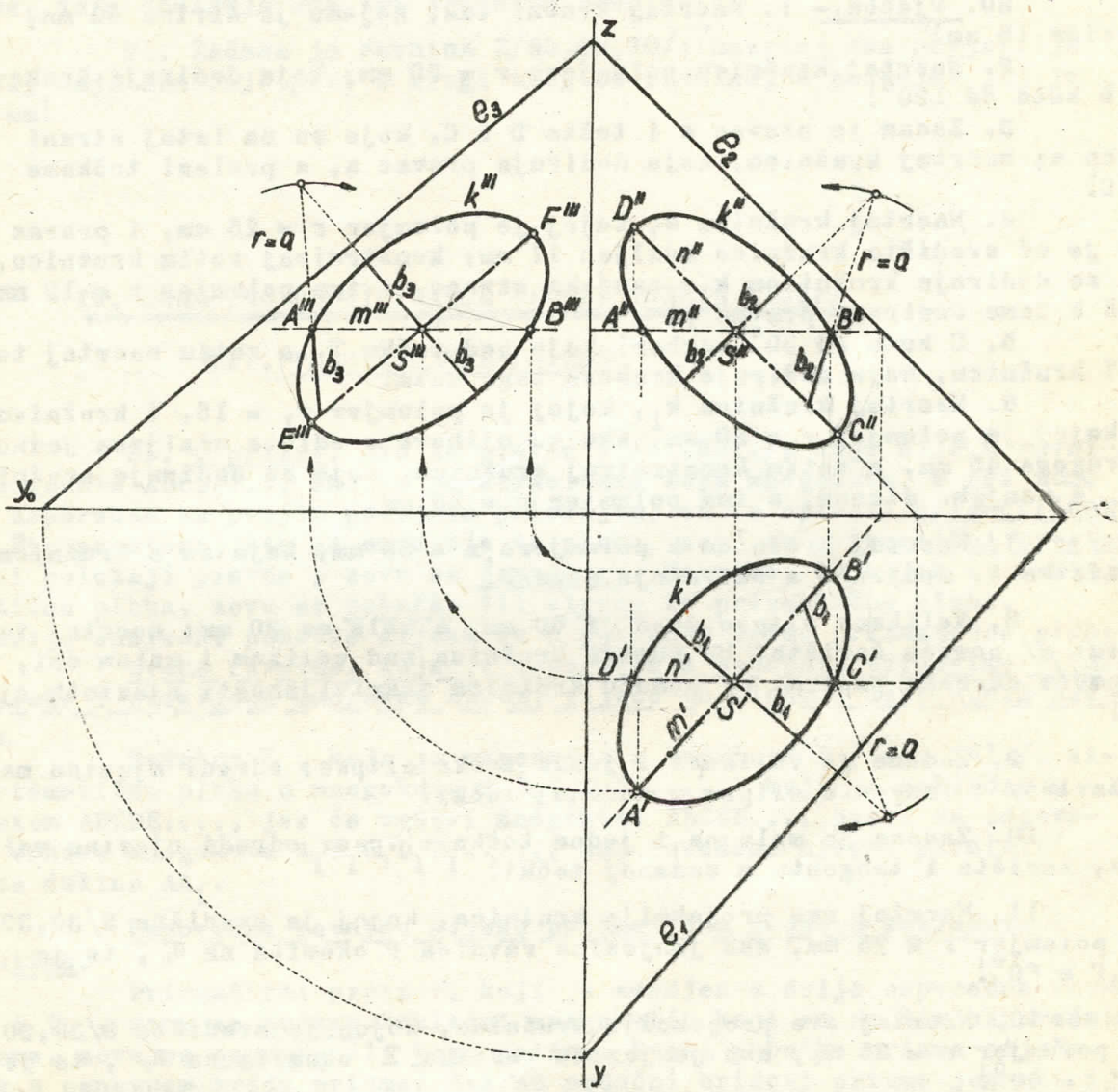
Isto tako promjer CD i GH kružnice k, koji su medju sobom okomiti, čine par konjugiranih promjera te kružnice, pa će njihovi nacrti C"D" i G"H" biti par konjugiranih promjera one elipse k", koja je nacrt te kružnice. Kako su k tome dužine C"D" i G"H" medju sobom okomite, to je dužina C"D" velika os, a dužina G"H" mala os te elipse k".

Elipse k' i k" nacrtamo na kraju pomoću kružnica zakrivljenosti njihovih tjemena /čl. 76. F.2/. Ako se te konstrukcije točno izvedu, moraju točke C' i D' biti na elipsi k', a točke A" i B" na elipsi k".

B.- U ravnini E/ 65, 75,65/ nalazi se točka S/20, Y, 25/i nacrtaj sve tri projekcije kružnice k, koja je u toj ravnini, ako je S njezino središte, a polumjer r= 20 mm! / sl.240./

Na ovom zadatku pokazat ćemo, kako se projekcije kružnice k mogu nacrtati bez upotrebe priklonica, koje prolaze njezinim središtem.

Budući da je od točke S zadan samo nacrt S", odredimo najprije njezin tlocrt S' pomoću tlocrta m' sutražnice m prvoga traga, koja ide



Sl. 240.

tom točkom, a njezin bokocrt S''' pomoću bokocrta m''' te sutražnice. Nacrtamo zatim projekcije promjera AB kružnice k, koji je usporedan s ravninom Π_1 . Njegov tlocrt A'B' = 2 r je na tlocrtu m' sutražnice m, a njegov nacrt A"B", odnosno bokocrt A''' B''' , odredimo na nacrtu m" , odnosno bokocrtu m''' , te sutražnice.

Dužina A'B' bit će velika os elipse k', koja je tlocrt kružnice k.

Odredimo nakon toga tlocrt i nacrt onoga promjera CD kružnice k, koji je usporedan s ravninom Π_2 . Njegov je nacrt C"D" = 2r na nacrtu n" sutražnice drugoga traga n, a njegov tlocrt C'D' na tlocrtu n' te sutražnice. Dužina C"D" bit će velika os one elipse k", koja je nacrt kružnice k.

Nacrtamo potom bokocrt onoga promjera EF kružnice k, koji je usporedan s ravninom π_3. Taj je bokocrt $E'''F''' = 2r$ usporedan s trećim tragom e_3 ravnine E. Dužina $E'''F'''$ bit će velika os one elipse k''', koja je bokocrt kružnice k.

Budući da za elipse k', k'' i k''' imamo njihove velike osi $A'B'$, $C''D''$ i $E'''F'''$, te za svaku od tih elipsa barem još jednu točku, odredimo sada veličine njihovih malih poluosi b_1, b_2 i b_3 na način prikazan u čl. 76.E. Elipse k', k'' i k''' nacrtamo na kraju pomoću kružnica zakrivljenosti njihovih tjemena /čl. 76. F.2/.

80. Vježbe.- 1. Nacrtaj kružni luk, kojemu je širina 60 mm, a visina 15 mm!

2. Nacrtaj kružnicu polumjera r = 20 mm, koja dodiruje krakove a i b kuta od 120^0!

3. Zadan je pravac a i točke B i C, koje su na istoj strani pravca a; nacrtaj kružnicu, koja dodiruje pravac a, a prolazi točkama B i C!

4. Nacrtaj kružnicu k, kojoj je polumjer r = 25 mm, i pravac p, koji je od središta kružnice udaljen 17 mm; konstruiraj zatim kružnicu, koja se dodiruje kružnicom k s vanjske strane, i ima polumjer r = 12 mm, a još k tome dodiruje pravac p!

5. U kutu od 30^0 odaberi koju god točku T, a zatim nacrtaj točkom T kružnicu, koja dodiruje krakove toga kuta!

6. Nacrtaj kružnicu k_1, kojoj je polumjer r_1 = 15, i kružnicu k_2, kojoj je polumjer r_2 = 20 mm, ako su njihova središta udaljena jedno od drugoga 45 mm, a zatim konstruiraj kružnicu, koja se dodiruje kružnice k_1 i k_2 s vanjske strane, a ima polumjer r = 15 mm!

7. Nacrtaj kružnicu k polumjera r = 50 mm, koja se s kružnicama iz zadatka 5. dodiruje s nutrašnje strane!

8. Velika os elipse duga je 60 mm, a mala os 30 mm; nacrtaj tu elipsu: a/ pomoću žarišta, b/ pomoću kružnica nad velikom i malom osi, c/ pomoću odreska papira, d/ pomoću kružnica zakrivljenosti njezinih tjemena!

9. Zadana je velika os i jedna točka elipse; odredi njezinu malu os, žarišta i tangentu elipse u zadanoj točki!

10. Zadana je mala os i jedna točka elipse; odredi njezinu veliku os, žarišta i tangentu u zadanoj točki!

11. Nacrtaj sve projekcije kružnice, kojoj je središte S/30,30, 30/, polumjer r = 25 mm, ako je njezina ravnina P okomita na π_1, te je $\sphericalangle \pi_2 P = 60^0$!

12. Nacrtaj sve projekcije kružnice, kojoj je središte S/30,30, 30/, polumjer r = 25 mm, ako je njezina ravnina Σ okomita na π_2, te je $\sphericalangle \Sigma \pi_1 = 60^0$!

13. Nacrtaj sve projekcije kružnice, kojoj je središte S/30,25, 25/, polumjer r = 20 mm, ako je njezina ravnina T okomita na π_3, te je $\sphericalangle T \pi_2 = 60^0$!

14. Nacrtaj sve projekcije kružnice, kojoj je promjer AB [A/ /15,40,20/, B/40,15,40/], ako je ravnina kružnice:

a/ okomita na ravnini π_1; b/ okomita na ravnini π_2; c/ okomita na ravnini π_3!

15. Nacrtaj sve projekcije kružnice, na kojoj su točke A/15,40, 20/, B/30,25,10/ i C/40,15,40/!

16. Konstruiraj točke i tangente elipse, koja je zadana parom konjugiranih promjera PR = 60 mm i MN = 50 mm, ako je $\sphericalangle RSN = 75^0$!

17. Konstruiraj veliku i malu os elipse, koja je zadana u zadatku 16!

18. Nacrtaj, na oba načina sve projekcije kružnice, koja je u ravnini E/-90,60,70/, ako je njezino središte S/-30,20,a/, a polumjer r = 15 mm. Upotrebi desni bokocrt!

19. Zadane su točke A/30,10,30/, B/60,20,30/ i C/40,40,50/ nacrtaj sve projekcije kružnice, koja prolazi tim točkama!

20. Zadana je ravnina E/80,50,70/; nacrtaj sve projekcije kružnice, koja dodiruje sva tri traga te ravnine!

21. Zadana je ravnina E/80,60,70/; nacrtaj sve projekcije kružnice, koja dodiruje prvi i drugi trag te ravnine, a polumjer joj je r = 25 mm!

IV. NORMALNO PROJICIRANJE GEOMETRIJSKIH TIJELA

§ 11. PROJICIRANJE PRIZME

81. O prizmi. Ako se pravac p /sl.241./, koji nije u ravnini Π mnogokuta ABCDE..., skliže po stranicama toga mnogokuta, a pri tome ostaje usporedan sa svojim početnim položajem, on će opisati prizmatičnu plohu. Dio prostora, što ga omedjuje ta ploha, zove se prizmatični prostor. Pojedini položaji pravca p zovu se izvodnice. Ravnine, od kojih se sastoji prizmatična ploha, zovu se pobočke ili strane te prizmatične plohe. Svake dvije susjedne pobočke sijeku se u pobočnom bridu prizmatične plohe.

Svaka ravnina, koja je usporedna s pobočnim bridovima prizmatične plohe i presijeca mnogokut ABCDE, siječe tu plohu u usporednim izvodnicama.

Ravnina Π_1, koja je usporedna s ravninom Π / sl. 241./, siječe prizmatičnu plohu u mnogokutu $A_1B_1C_1D_1E_1$....., koji je sukladan s mnogokutom ABCDE...., jer će vrhovi mnogokuta ABCDE.... pasti na odgovarajuće vrhove mnogokuta $A_1B_1C_1D_1E_1$....., kad izvedemo njegov paralelni pomak za dužinu AA_1.

Usporedne ravnine sijeku prizmatičnu plohu u sukladnim mnogokutima.

Prizmatični prostor, koji je omedjen s dvije usporedne ravnine Π i Π_1, zove se prizma. Sukladni mnogokuti, koji su na tim usporednim ravninama, zovu se osnovke ili baze prizme. Svaka pobočka prizme siječe osnovku u osnovnom bridu prizme. Svi su pobočni bridovi prizme jednaki i usporedni. Pobočke prizme su paralelogrami, a sve pobočke prizme zajedno čine njezino pobočje. Udaljenost od jedne do druge osnovke prizme zove se visina prizme.

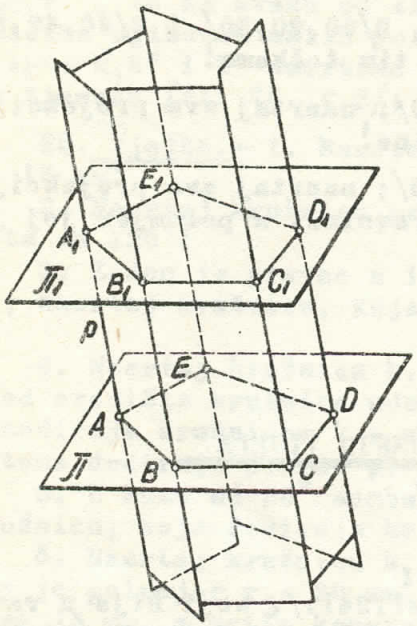
Po broju stranica, što ih ima osnovka, prizma može biti trostrana, četverostrana, ... n-terostrana.

Prizma je uspravna, kad su njezini pobočni bridovi okomiti na njezinim osnovkama, a kad su oni kosi prema osnovkama, prizma je kosa.

Uspravna prizma, kojoj su osnovke pravilni mnogokuti, zove se kraće pravilna.

Prizma, kojoj su osnovke paralelogrami, zove se paralelepiped, a kad su osnovke i pobočke paralelepipeda pravokutnici, zove se pravokutni paralelepiped ili kvadar.

Kvadar, koji ima dvije jednake dimenzije, zove se kvadratska prizma, a kad su sve tri dimenzije jednake, zove se kocka.



Sl. 241.

82. Općenito o projiciranju uglastog tijela. Projekcije nekog uglastog tijela dobijemo tako, da na ravninu tlocrta, ili nacrta, ili bokocrta, projiciramo sve plohe, koje omedjuju to tijelo /sl.242./. Kako su plohe tijela omedjene bridovima, odredjujemo projekcije ploha pomoću projekcija tih bridova; a budući da su bridovi tijela omedjeni vrhovima, dobijemo projekcije bridova pomoću projekcija tih vrhova. Ako se, dakle, odrede projekcije svih vrhova nekog uglastog tijela, pa se njihove projekcije spoje onim redom, kako su ti vrhovi spojeni u prostoru, dobiju se projekcije bridova i ploha, kojima je to tijelo omedjeno.

Kad neko uglasto tijelo promatramo u smjeru projiciranja, jedan dio toga tijela vidimo, a drugi ne vidimo. Bridovi, koji nam rastavljaju vidljivi dio tijela od nevidljivoga, kad tijelo gledamo ili projiciramo u odredjenom smjeru, na neku ravninu Π , čine konturu toga tijela za taj smjer gledanja ili projiciranja, a projekcije tih bridova na toj ravnini Π čine konturu projekcije toga tijela za isti smjer projiciranja.

Kad promatramo prizmatični predmet iz sl. 242. u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_1 , vidimo samo njegove pobočke EFGH i FIJG. Za taj smjer projiciranja je, dakle, prostorni mnogokut EFIJGH kontura tijela, a tlocrt E'F'I'J'G'H' toga mnogokuta je kontura tlocrta toga tijela.

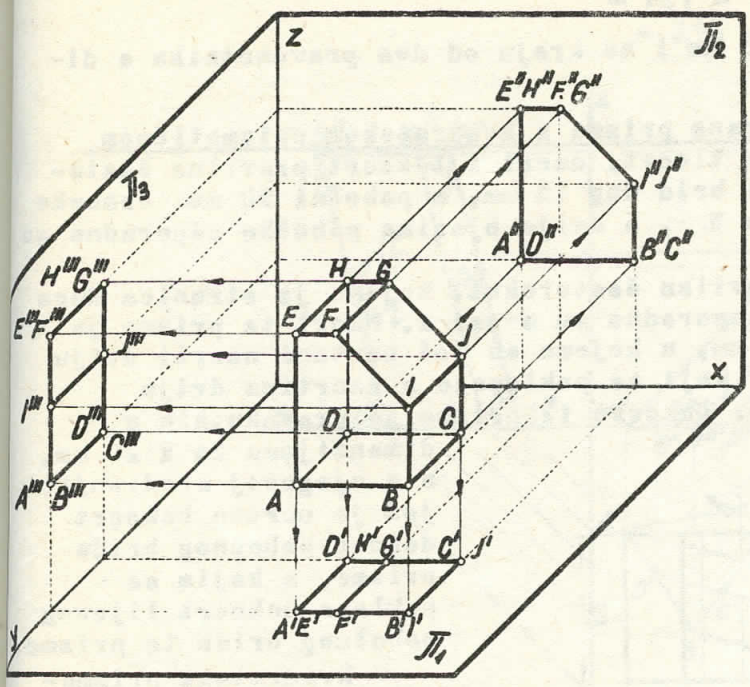
Tako će za smjer normalnog projiciranja na ravninu Π_2 biti ravni mnogokut ABIFE kontura tijela, a nacrt A"B"I"F"E" toga mnogokuta bit će kontura nacrta toga tijela.

Za smjer normalnog projiciranja na ravninu Π_3 je prostorni mnogokut BCJGFI kontura tijela, a bokocrt B"C"J"G"F"I" toga mnogokuta je kontura bokocrta toga tijela.

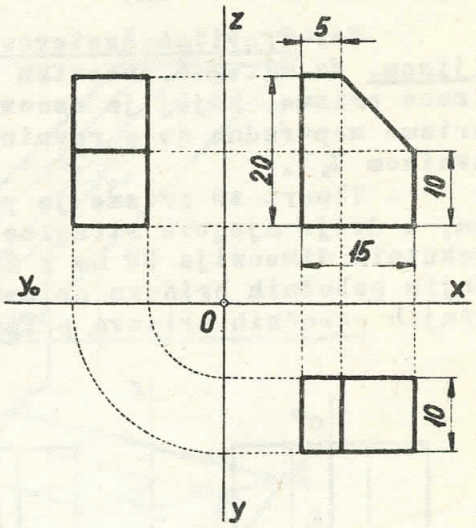
Na sl. 243. nacrtan je tlocrt, nacrt i bokocrt prizmatičnog tijela prikazanog slikom 242. Na toj slici ispuštene su oznake projekcija vrhova toga predmeta, kako se to na tehničkim crtežima čini, ali zato su označene pomoću kotnih crta i kotnih brojeva sve njegove dimenzije, koje su neophodno potrebne za izradbu toga predmeta.

83. Kvadar i njegova mreža. Na sl. 244. nacrtan je tlocrt, nacrt i bokocrt kvadra, kojemu su dimenzije 20 mm, 15 mm i 25 mm, ako je njegova donja osnovka ABCD u ravnini Π_1 , a dvije su njegove pobočke usporedne s ravninom Π_2 .

Kad promatramo kvadar u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_1 , vidimo samo njegovu gornju osnovku $A_1B_1C_1D_1$, zbog toga je tlocrt $A'_1B'_1C'_1D'_1$ te osnovke ujedno i tlocrt čitavog kvadra .



Sl. 242.



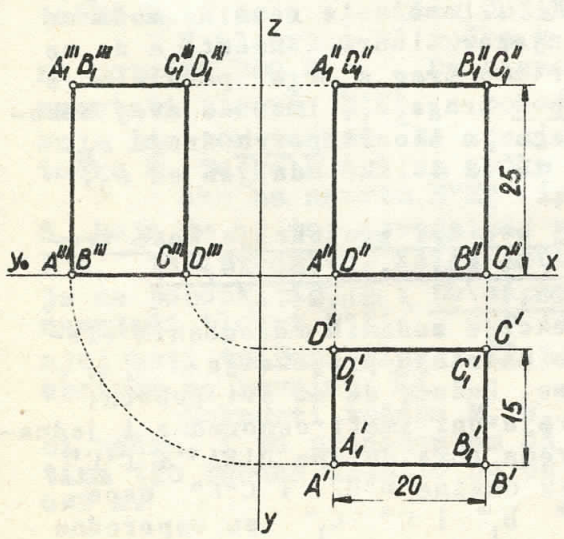
Sl. 243.

Promatramo li zatim taj kvadar u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_2 , vidjet ćemo samo njegovu prednju pobočku A B B_1A_1, zbog toga će nacrt A" B"B_1" A_1" te pobočke biti i nacrt čitavog kvadra.

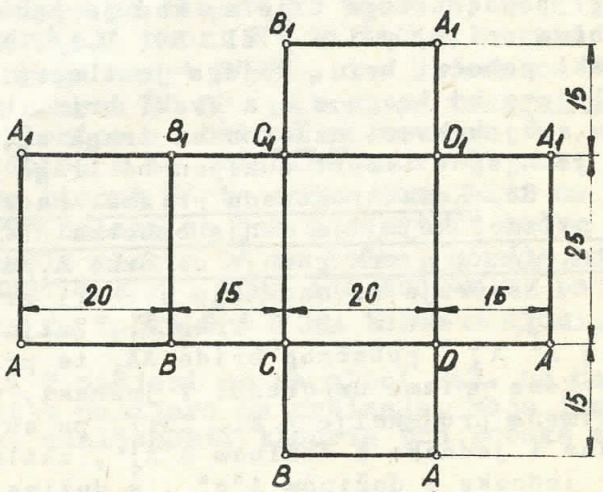
Kad promatramo na kraju kvadar u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_3 , vidimo samo njegovu desnu pobočku BCC_1B_1, pa se zbog toga s bokocrtom B" C" B_1" C_1" te pobočke poklapa i bokocrt čitavog kvadra.

Nadji na sl.244. sve tri projekcije donje i gornje osnovke toga kvadra, zatim sve projekcije njegove prednje i stražnje pobočke, i na kraju sve projekcije desne i lijeve pobočke.

Ako sve pobočke i obje osnovke toga kvadra razmotamo na ravninu crtnje, dobit ćemo mrežu toga kvadra / sl. 245./. Osnovni bridovi AB, BC, CD, DA nanizali su se na toj slici jedan za drugim u pravoj veličini i u istom pravcu, a pobočni bridovi AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 medju sobom su usporedni i svi su okomiti na razmotanim osnovnim bridovima. Mreža se kvadra sastoji od dva pravokutnika s dimenzijama 20 mm x 25 mm, zatim od dva



Sl. 244.

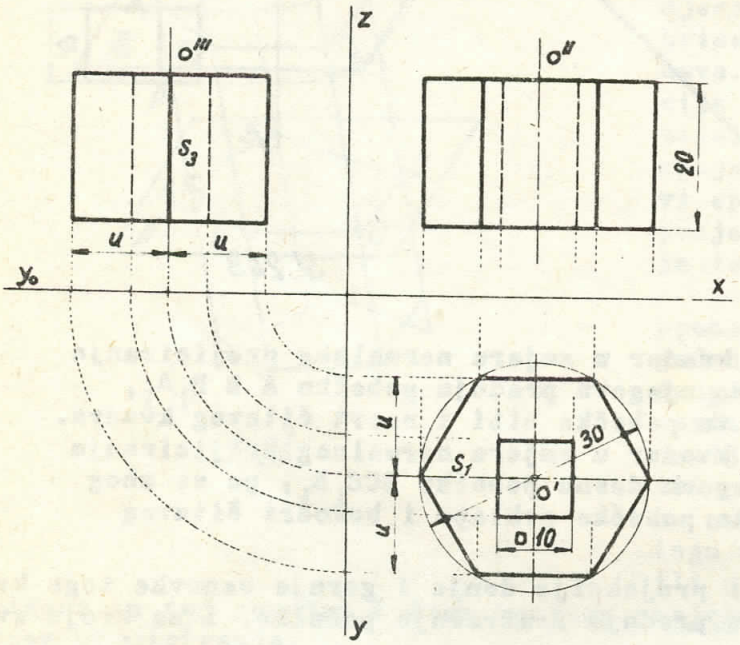


Sl. 245

pravokutnika dimenzija 15 mm x 25 mm i na kraju od dva pravokutnika s dimenzijama 20 mm x 15 mm.

84. Pravilna šesterostrana prizma s kvadratskom prizmatičnom šupljinom. Na sl. 246. nacrtan je tlocrt, nacrt i bokocrt pravilne šesterostrane prizme, kojoj je osnovni brid dug 15 mm, a pobočni 20 mm. Osnovke te prizme usporedne su s ravninom Π_1 , a dvije njezine pobočke usporedne su s ravninom Π_2 .

Tlocrt te prizme je pravilan šesterokut, kojemu je stranica duga 15 mm, a dvije njegove stranice usporedne su s osi x. Nacrt te prizme je pravokutnik dimenzija 30 mm x 20 mm, u kojemu su još ucrtani nacrti dviju prednjih pobočnih bridova prizme, koji se poklapaju s nacrtima dviju stražnjih pobočnih bridova prizme. Bokocrt te prizme je pravokutnik s dimenzijama 2u x 20 mm, a u njegovoj središnjici još je ucrtan bokocrt desnog pobočnog brida prizme, s kojim se poklapa bokocrt lijevog pobočnog brida te prizme.



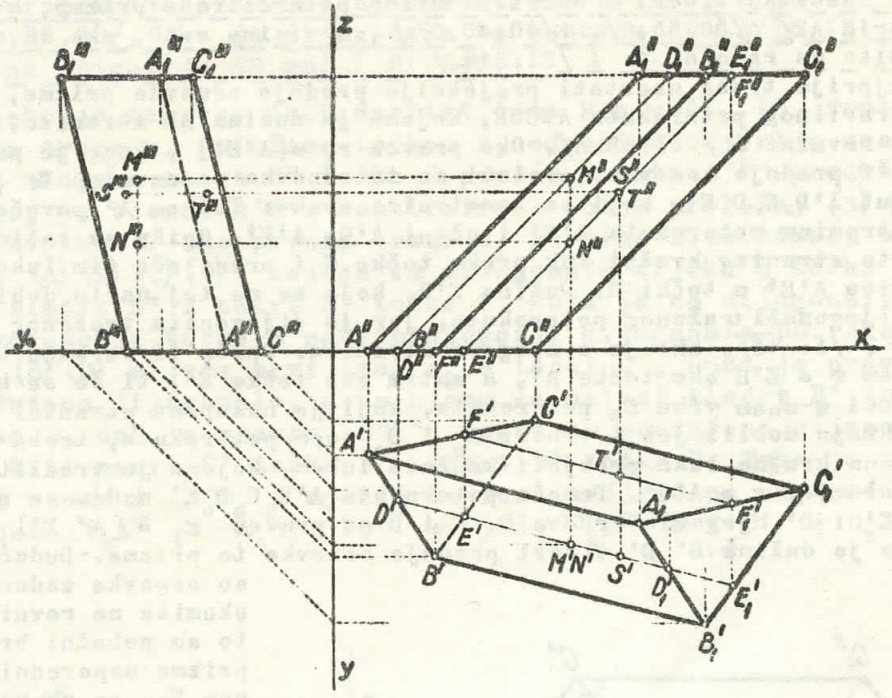
Sl.246

Kvadratska prizmatična šupljina ima: tlocrt kvadrat dimenzija 10 mm x 10 mm, nacrt pravokutnik dimenzija 10 mm x 20 mm, a bokocrt isto tako pravokutnik dimenzija 10 mm x 20 mm. Konture nacrta i bokocrta te kvadratske prizmatične šupljine nacrtane su isprekidanim crtama, jer se ona ne vidi, kad se pravilna šesterostrana prizma promatra u smjeru projiciranja na ravninu Π_2 , odnosno na ravninu Π_3 .

Na sl. 246. ispuštene su oznake projekcija vrhova toga prizmatičnog tijela, a nacrtane su projekcije o', o'' i o''' njegove vertikalne osi simetrije, kao i prvi i treći trag s_1 i s_3 njegove vertikalne ravnine simetrije Σ , koja je usporedna s ravninom Π_2 . Pomoću te ravnine može se nacrtati bokocrt toga tijela, kad je zadan njegov tlocrt i nacrt, a da ne upotrebimo osi x, y i z / čl. 54. B.1/. Nacrtamo trag $s_3 \equiv$ o''' paralelno s o''. Svaki pobočni brid, kojega je tlocrt ispod traga s_1, imat će svoj bokocrt nalijevo od traga s_3, a svaki brid, kojega je tlocrt povrh traga s_1, imat će svoj bokocrt nadesno od traga s_3, i to za toliko udaljen od s_3, koliko je njegov tlocrt udaljen od traga s_1.

85. Kosa trostrana prizma. Nacrtaj sve tri projekcije kose trostrane prizme, kojoj je donja osnovka ABC/ A/5, 15,0/, B/15, 30,0/, C/30, 10,0/ , a vrh gornje osnovke A_1/45,25,40/ ! / Sl.247./

Najprije se nacrtaju sve tri projekcije zadanih odredbenih elemenata, t.j. trokuta ABC i vrha A_1. Zatim se nacrtaju projekcije $A'A_1'$, $A''A_1''$ i $A'''A_1'''$ pobočnog brida AA_1 te prizme. Budući da su svi pobočni bridovi kose prizme usporedni i jednaki, moraju oni imati usporedne i jednake istoimene projekcije / čl. 23./, pa su prema tome dužine $B'B_1'$ i $C'C_1'$ usporedne i jednake s dužinom $A'A_1'$, zatim su dužine $B''B_1''$ i $C''C_1''$ usporedne i jednake s dužinom $A''A_1''$, a dužine $B'''B_1'''$ i $C'''C_1'''$ su usporedne i jednake s dužinom $A'''A_1'''$. Na kraju se nacrtaju projekcije A_1' B_1' C_1' , A_1'' B_1'' C_1'' i A_1''' B_1''' C_1''' gornje osnovke A_1 B_1 C_1.



Sl. 247

Kad promatramo tu kosu prizmu odozgo u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_1, vidimo njezinu gornju osnovku $A_1B_1C_1$ i njezine pobočke ABB_1A_1 i ACC_1A_1, a kad je promatramo odsprijeda u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_2, vidimo njezine prednje pobočke ABB_1A_1 i BCC_1B_1, a osnovke nam se prikažu kao dužine. Promatramo li tu kosu prizmu s desne strane u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_3, vidimo samo njezinu pobočku BCC_1B_1, a osnovke se opet prikažu kao dužine.

Na sl. 247. riješen je još i ovaj zadatak: Zadan je tlocrt M' točke M, koja je na pobočki ABB_1A_1; odredi njezin nacrt M"!

Ako su krajnje točke izvodnice, koja ide točkom M, točke D i D_1, onda njezin tlocrt $D'D_1'$ mora ići točkom M' usporedo s dužinom $A'A_1'$. Odredimo li zatim nacrte D" i D_1'' njezinih krajnjih točaka, bit će dužina $D''D_1''$ nacrt te izvodnice, na kojoj se mora nalaziti traženi nacrt M" točke M, i to u sjecištu dužine $D''D_1''$ i ordinale povučene točkom M'.

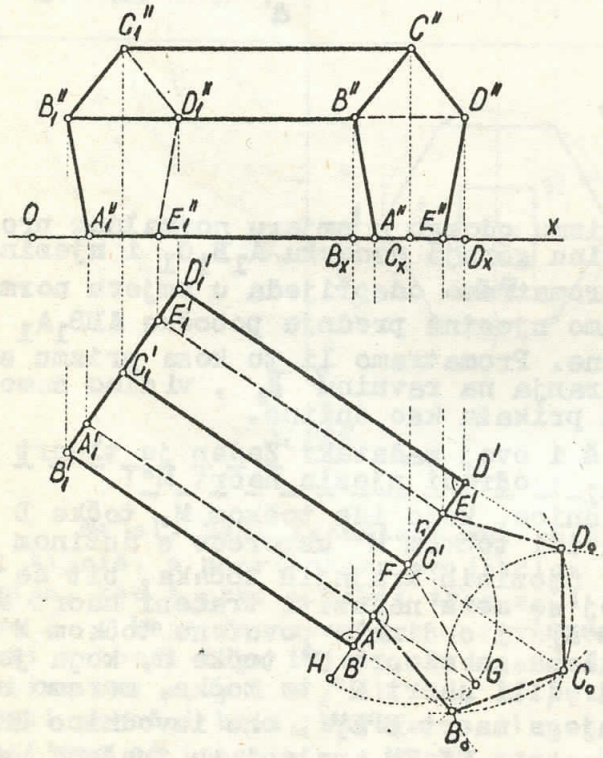
S tlocrtom M' točke M poklapa se tlocrt N' točke N, koja je na pobočki BCC_1B_1. Da bismo odredili nacrt N" te točke, moramo najprije nacrtati tlocrt $E'E_1'$, a pomoću njega nacrt $E''E_1''$, one izvodnice EE_1, koja ide tom točkom. Na njezinom nacrtu $E''E_1''$ nalazi se traženi nacrt N" točke N. Točke M i N su točke zaklonice s obzirom na ravninu Π_1.

Ako na nacrtu $E''E_1''$ izvodnice EE_1 označimo nacrt S" neke točke S, koja je na toj izvodnici, onda tlocrt S' te točke mora biti na tlocrtu $E'E_1'$ te izvodnice. Ali u točki S" nalazi se još i nacrt T" točke T, koja je na pobočki ACC_1A_1. Da bismo našli tlocrt T' te točke, moramo najprije nacrtati tlocrt $F'F_1'$, one izvodnice FF_1, koja ide točkom T, pa će na njoj biti traženi tlocrt T' točke T. Točke S i T su točke zaklonice s obzirom na ravninu Π_2.

Bokocrti točaka M, N, S i T nadjeni su na slici 247. na najkraći način, i to prenašanjem od osi z nalijevo na ordinale, koje idu nacrtima tih točaka okomito na os z, udaljenosti tlocrta tih točaka od osi x.

86. Pravilna peterostrana prizma, kojoj su osnovke okomite na ravnini π_1. Nacrtaj tlocrt i nacrt pravilne peterostrane prizme, kojoj je osnovni brid $AE\,[A(50,55,0),\ E(30,40,0)]$, a visina $v=50$, ako su njezine osnovke okomite na ravnini π_1 [Sl. 248.]

Najprije treba nacrtati projekcije prednje osnovke prizme, t.j. projekcije pravilnog peterokuta ABCDE, kojemu je dužina AE stranica, ako je on okomit na ravnini π_1 / čl. 68.A/. Oko pravca $r_1 = [A'E']$, koji je prvi trag ravnine P prednje osnovke, preloži se ta osnovka na ravninu π_1, i dobije peterokut $A'B_0C_0D_0E'$, koji se konstruira ovako: Točkom A' povuče se okomica na stranicu peterokuta $A'E'$ i učini $A'G = A'E'$. Opiše se zatim oko polovišta F te stranice kružni luk preko točke G i presiječe tim lukom produženu stranicu $A'E'$ u točki H. Dužina $E'H$, koja se na taj način dobije, jednaka je dijagonali traženog peterokuta, jer je dijagonala traženog peterokuta $d = \frac{s}{2}\cdot(1+\sqrt{5})$, ako je s njegova stranica. Opiše li se sada kružni luk polumjerom $r = E'H$ oko točke A', a zatim oko točke E', ti će se kružni lukovi presjeći u onom vrhu C_0 peterokuta, koji je nasuprot stranici $A'E'$. Da bi se na kraju dobili još i vrhovi B_0 i D_0 toga peterokuta, treba dva zadnja nacrtana kružna luka presjeći kružnim lukom, kojemu je središte u vrhu C_0, a polumjer $r = A'E'$. Pomoću peterokuta $A'B_0C_0D_0E'$ nadju se sada tlocrti B', C' i D' njegovih vrhova B, C i D na pravcu $r_1 = [A'E']$, pa se dobije, da je dužina B' D' tlocrt prednje osnovke te prizme. Budući da su osnovke zadane prizme okomite na ravnini π_1, to su pobočni bridovi te prizme usporedni s ravninom π_1, pa se na π_1 projiciraju u pravoj veličini. Zbog toga će tlocrti tih pobočnih bridova biti okomiti na pravcu r_1 i dugi 50 mm. Tlocrt stražnje osnovke te prizme je dužina $B_1'D_1'$, koja je usporedna i jednaka s dužinom B'D'. Od pobočnih bridova prizme vide se u tlocrtu bridovi BB_1, CC_1 i DD_1, a od pobočaka vide se samo pobočke BCC_1B_1 i CDD_1C_1, dok se osnovke prikažu kao dužine.

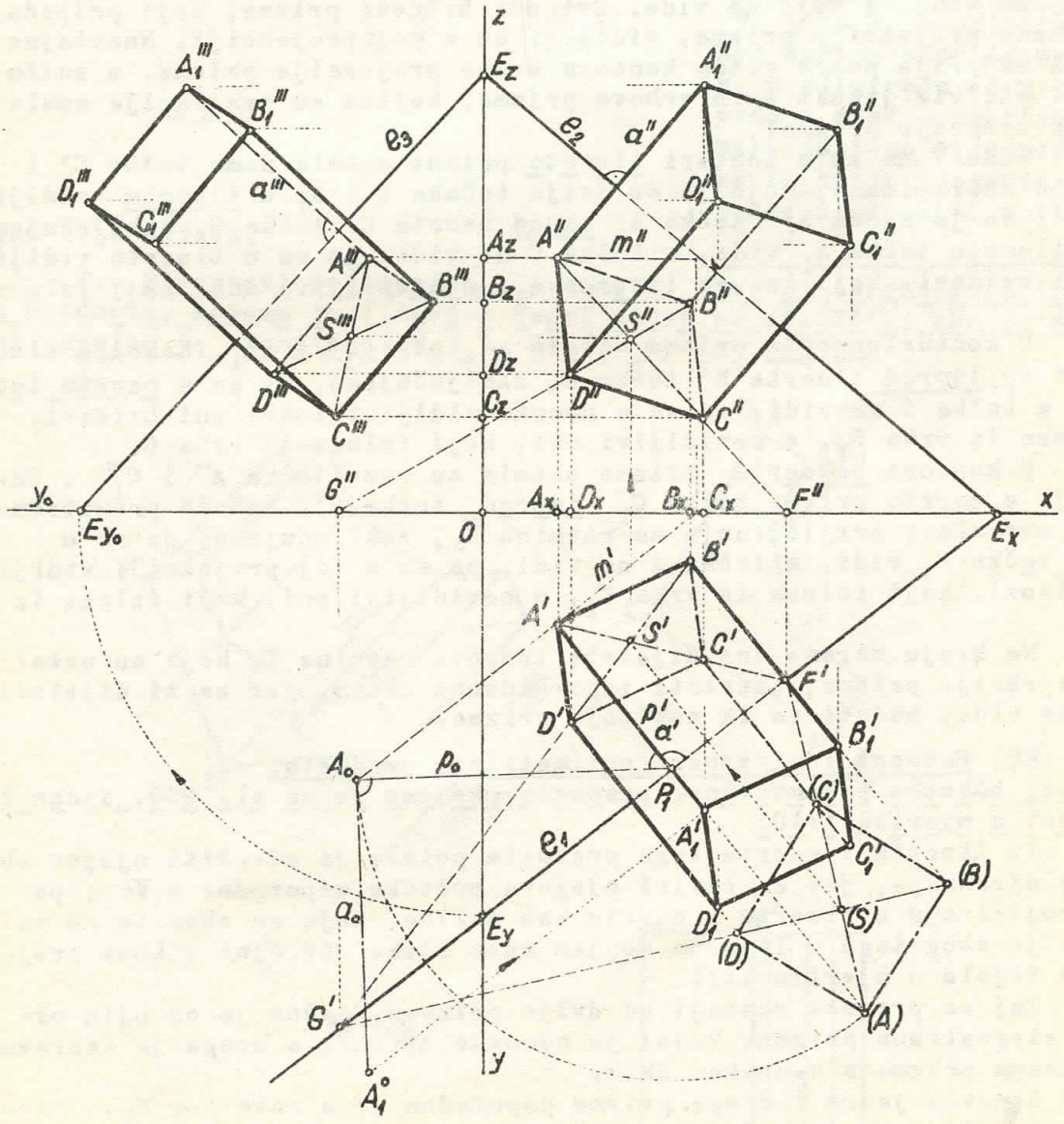


Sl. 248.

Nacrt A" B" C" D" E" prednje osnovke te prizme odredi se pomoću njezinog tlocrta i preloženog položaja. Učini se $B_xB'' = B'B_0$, $C_xC'' = C'C_0$, $D_xD'' = D'D_0$, pa se dobije peterokut A"B"C" D"E", a nacrt A_1'' B_1'' C_1'' D_1'' E_1'' stražnje osnovke prizme sukladan je s nacrtom prednje osnovke. Nacrti pobočnih bridova usporedni su s osi x, jer su ti bridovi usporedni s ravninom π_1. U nacrtu vidi se prednja osnovka ABCDE, zatim bridovi AA_1, BB_1, i CC_1, te pobočke ABB_1A_1 i BCC_1B_1, dok se pobočka AEE_1A_1 prikaže kao dužina.

87. Pravilna četverostrana prizma, kojoj je osnovka u općoj ravnini. Nacrtaj projekcije pravilne četverostrane prizme, kojoj je osnovka u ravnini E/70,55,60/, ako je dijagonala te osnovke AC / A/10,15,z/, C/30, 20,z/ / , a visina prizme je 40 mm! (Sl.249.)

Projekcije osnovke ABCD nacrtat ćemo kao u čl. 70. Pomoću sutražnice prvoga traga m, položene točkom A, odredimo najprije nacrt A" te točke, a zatim nadjemo nacrt C" točke C pomoću nacrta A"F" produžene dijagonale AF, kojoj je tlocrt A'F'. Konstruiramo potom preložaj (A) (C) dijagonale AC na ravnini π_1 oko prvoga traga e_1 ravnine E, pa pomoću njega nacrtamo kvadrat (A) (B) (C) (D), kojega se dijagonale sijeku u točki (S). Odredimo sada tlocrt S' i nacrt S" točke S, koja je na dijagonali AC, pa ćemo pomoću projekcija točke S naći projekcije dijagonale BD. Ako produžena dijagonala (B) (D) siječe prvi trag e_1 u točki G', onda je pravac G'S' tlocrt te produžene dijagonale, a na njemu se nalazi tlocrt B' točke B i tlocrt D' točke D, dok je pravac G"S" nacrt te produžene dijagonale, a na njemu mora biti nacrt B" točke B i nacrt D" točke D. Tako je odredjen tlocrt i nacrt osnovke ABCD, a njezin bokocrt nadjemo na najkraći način pomoću jednakosti $A_z A''' = A_x A'$, $B_z B''' = B_x B'$, $C_z C''' = C_x C'$ i $D_z D''' = D_x D'$.



Sl. 249.

Budući da je pobočni brid prizme a = $[A\ A_1]$ okomit na ravnini osnovke E, moraju njegove projekcije a', a" i a‴ biti okomite na istoimenim tragovima te ravnine; a projekcije vrha A_1, koji je na tom bridu nadjemo ovako: Budući da je brid AA_1 okomit na ravnini E, on je okomit i na priklonici p prvoga traga te ravnine, koja ide točkom A. Povučemo zbog toga točkom A_0 okomicu na preloženu priklonicu p_0, i učinimo $a_0 = A_0A_1^0$ = 40 mm. Ako sada točkom A_1^0 povučemo usporednicu s dužinom A_0A^0, mora u sjecištu te usporednice i pravca a' biti A_1'. Nacrt A_1'' vrha A_1 dobijemo zatim na pravcu a" pomoću ordinale povučene točkom A_1' okomito na os x, a njegov bokocrt A_1''' nalazi se u sjecištu ordinale povučene točkom A_1'' okomito na os z i pravca a‴.

Budući da su pobočni bridovi prizme usporedni i jednaki, moraju oni imati usporedne i jednake projekcije / čl. 23./. Zbog toga moraju biti usporedne i medju sobom jednake ove dužine $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$ i $D'D_1'$, zatim dužine $A''A_1''$, $B''B_1''$, $C''C_1''$ i $D''D_1''$, kao i dužine $A'''A_1'''$, $B'''B_1'''$, $C'''C_1'''$ i $D'''D_1'''$.

Ako sada spojimo medju sobom tlocrte, zatim nacrte i bokocrte točaka A_1, B_1, C_1 i D_1, dobit ćemo projekcije gornje osnovke prizme.

Na kraju treba da odredimo, koji se bridovi prizme u njezinim projekcijama vide, a koji ne vide. Svi oni bridovi prizme, koji pripadaju konturi neke projekcije prizme, vidljivi su u toj projekciji. Nacrtajmo zbog toga najprije punom crtom konturu svake projekcije prizme, a zatim ćemo ispitati vidljivost onih vrhova prizme, kojima su projekcije ostale u konturi projekcije prizme.

Budući da su u konturi tlocrta prizme ostale samo točke C' i A_1', treba da ispitamo, koja je od dviju točaka C i A_1 u tlocrtu vidljiva. Budući da je nacrt A_1'' točke A_1 iznad nacrta C" točke C, zaključujemo, da se u tlocrtu točka A_1 vidi, a točka C ne vidi, pa su u tlocrtu vidljivi i svi oni bridovi, koji izlaze iz vrha A_1, a nevidljivi oni, koji izlaze iz vrha C.

U konturi nacrta prizme nalaze se točke B" i D''_1. Kako je tlocrt D_1' točke D_1 ispred tlocrta B' točke B, zaključujemo, da se u nacrtu točke D_1 vidi, a točka B ne vidi, pa su u nacrtu vidljivi i svi oni bridovi, koji izlaze iz vrha D_1, a nevidljivi oni, koji izlaze iz vrha C.

U konturi bokocrta prizme ostale su samo točke A‴ i C_1'''. Budući da je u nacrtu prizme točka C_1'' ispred točke A", kad ih promatramo u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_3, zaključujemo, da se u bokocrtu točka C_1 vidi, a točka A ne vidi, pa su u toj projekciji vidljivi i svi bridovi, koji izlaze iz vrha C_1, a nevidljivi oni, koji izlaze iz vrha A.

Na kraju moramo one dijelove tragova ravnine E, koji su ostali ispod projekcija prizme, nacrtati isprekidanom crtom, jer se ti dijelovi tragova ne vide, budući da ih zaklanja prizma.

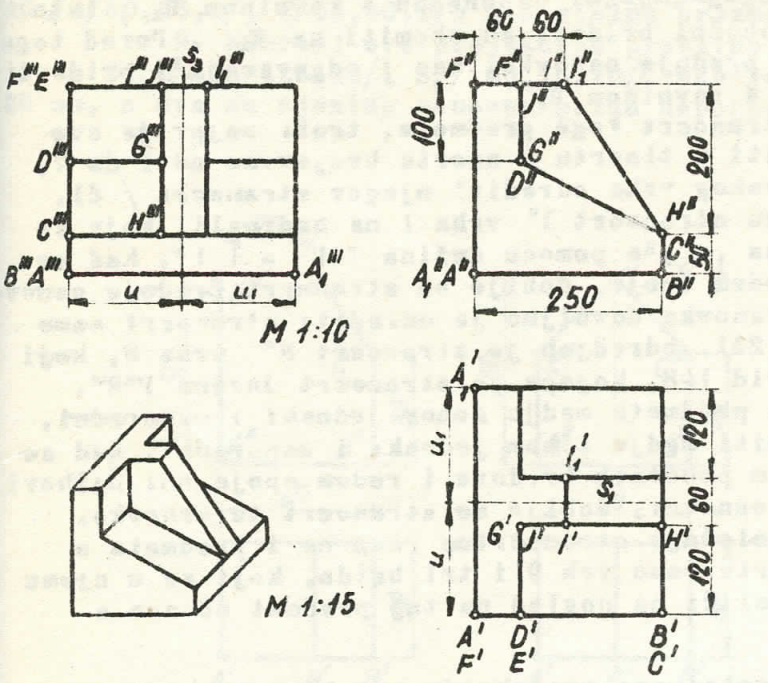
88. Bokocrt i stranocrt prizmatičnog predmeta.

A.- Nacrtaj bokocrt prizmatičnog predmeta, kojemu je na sl. 250. zadan tlocrt i nacrt u mjerilu 1:10!

Iz tlocrta i nacrta toga predmeta poteže je odrediti njegov oblik i njegove dimenzije, jer su četiri njegove pobočke usporedne s Π_3, pa se one projiciraju u tlocrtu i nacrtu kao dužine, koje su okomite na osi x. Zadana je zbog toga u lijevom donjem kutu slike 250. još i kosa projekcija toga tijela u mjerilu 1:15.

Taj se predmet sastoji od dviju prizama. Jedna je od njih uspravna šesterostrana prizma, kojoj je osnovka ABCDEF, a druga je uspravna četverostrana prizma s osnovkom GHIJ.

Osnovka jedne i druge prizme usporedna je s ravninom Π_2. Jedan od pobočnih bridova prve prizme je brid $A A_1$, a od druge je brid II_1

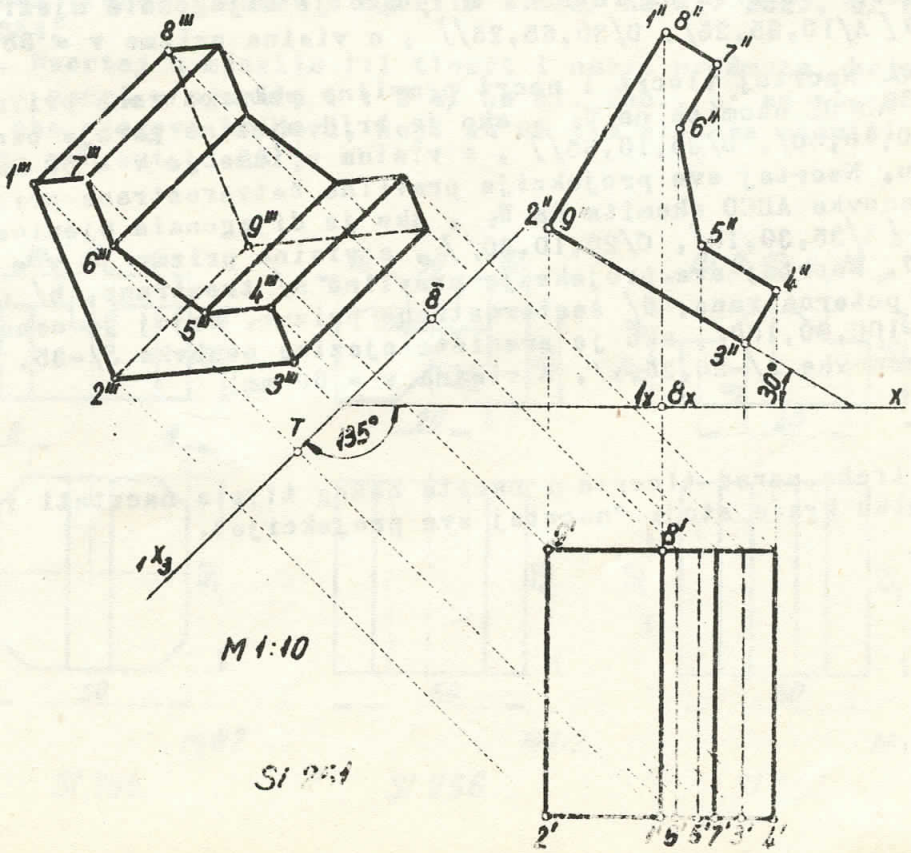


Sl.250.

Pri crtanju bokocrta toga predmeta na sl.250. nisu upotrebljene osi x,y i z, već njegova ravnina simetrije Σ , koja je usporedna s ravninom π_2 , a ima tragove s_1 i s_3 /čl.84./. Svaki vrh toga tijela ima svoj bokocrt u visini svoga nacrta, i to onaj, koji ima svoj tlocrt ispod traga s_1, imat će svoj bokocrt naličjevo od traga s_3, a svaki onaj vrh, koji ima svoj tlocrt povrh traga s_1, imat će svoj bokocrt nadesno od traga s_3, kako je to prikazano na vrhovima A i A_1.

One pobočke toga predmeta, koje su usporedne s ravninom π_3, i koje se na π_1 i na π_2 projiciraju kao dužine okomite na osi x, projiciraju se u bokocrtu u pravoj veličini, pa uslijed toga nije sada teško iz triju njegovih projekcija odrediti oblik i veličinu toga tijela.

B.- Stranocrt prizmatičnog predmeta. Nacrtaj stranocrt prizmatičnog predmeta, kojemu je tlocrt i nacrt zadan na sl. 251$_b$, ako je stranocrtna ravnina π_3 okomita na π_1 , a čini s π_2 kut od 135° !



Sl. 251

Prizmatični predmet, kojemu je na sl. 251. zadan tlocrt i nacrt, ima prednju osnovku 1-2-3-4-5-6-7 usporednu s ravninom π_2, isto tako i stražnju, a njegovi pobočni bridovi su okomiti na π_2. Pored toga čine bridovi 2-3, 4-5, i 1-7 prednje osnovke, kao i odgovarajući bridovi stražnje osnovke, kut od 30^0 s ravninom π_1.

Da bi se nacrtao stranocrt toga predmeta, treba najprije sve vrhove prednje osnovke označiti u tlocrtu i nacrtu brojevima od 1 do 7, pa pomoću tlocrta i nacrta svakog vrha odrediti njegov stranocrt / sl. 82./. Ako je na pr., odredjen stranocrt 1'' vrha 1 na ordinali, koja se povuče točkom 1' okomito na os $_1x_3$, a pomoću dužina $1'1'' = 1_y1''$, kad se stranocrti svih tih vrhova redom spoje, dobije se stranocrt prednje osnovke. Od stranocrta stražnje osnovke dovoljno je odrediti stranocrt samo jednog njezinog vrha. Na sl. 251. odredjen je stranocrt 8'' vrha 8, koji s vrhom 1 omedjuje pobočni brid 1-8, kojega je stranocrt dužina 1''8''. Budući da su svi bridovi toga predmeta medju sobom jednaki i usporedni, moraju i njihovi stranocrti biti medju sobom jednaki i usporedni. Kad se nacrtaju stranocrti svih sedam pobočnih bridova i redom spoje oni njihovi vrhovi, koji su na stražnjoj osnovci, dobije se stranocrt te osnovke.

Pri takvom izboru položaja stranocrtne ravni ne i predmeta u prostoru ne vide se u stranocrtu samo vrh 9 i tri brida, koji se u njemu sastaju; a stranocrt tijela naliči na pogled na taj predmet odozgo s lijeve strane.

89. Vježbe.[1] - 1. Nacrtaj sve projekcije pravilne trostrane prizme, kojoj je osnovni brid 30 mm, a pobočni 40 mm dug, ako je jedna njezina pobočka u ravnini π_1, a njezini su pobočni bridovi okomiti na ravnini π_2!

2. Nacrtaj sve projekcije pravilne trostrane prizme iz vježbe 1., ako njezini pobočni bridovi čine s ravninom π_2 kut od 30^0!

3. Nacrtaj sve projekcije kose četverostrane prizme, kojoj je donja osnovka paralelogram ABCD[A/45,25,0/, B/55,40,0/, C/70,20,0/, D/], a vrh gornje osnovke A_1/5,15,40/, zatim odredi nacrte točaka M i N, ako je njihov tlocrt $M' \equiv N'$ / 35,30,z/!

4. Nacrtaj tlocrt i nacrt pravilne šesterostrane prizme, kojoj je osnovka ABCDEF okomita na ravnini π_1, ako je dijagonala njezine prednje osnovke AD[A/10,35,25/, D/30,65,25/], a visina prizme v = 55 mm!

5. Nacrtaj tlocrt i nacrt pravilne peterostrane prizme, kojoj je osnovka ABCDE okomita na π_2, ako je brid njezine gornje osnovke A_1B_1 [A_1/20,10,50/, B/35,10,65/], a visina prizme je v = 50 mm!

6. Nacrtaj sve projekcije pravilne četverostrane prizme, kojoj je osnovka ABCD okomita na π_2, ako je dijagonala njezine donje osnovke AC [A/35,30,10/, C/20,10,30/], a visina prizme je v = 60 mm!

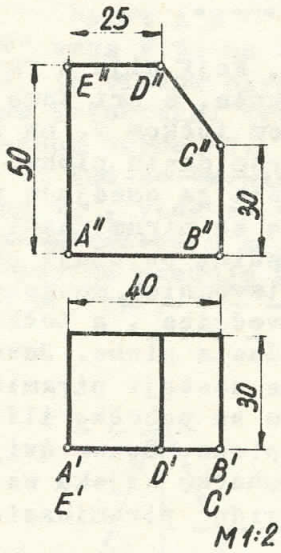
7. Nacrtaj sve projekcije pravilne a/ trostrane, b/ četverostrane, c/ peterostrane, d/ šesterostrane prizme, kojoj je osnovka u ravnini E/-100,80,100/, ako je središte njezine osnovke S/-35, 30,z/, jedan vrh osnovke A/-20,25,z/, a visina v = 60 mm!

---

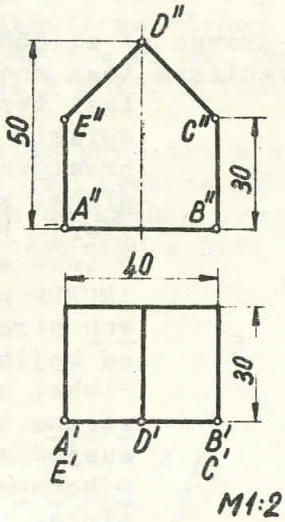
[1] Kad treba pored tlocrta i nacrta nekog tijela nacrtati i bokocrt, onda u zadatku kraće stoji "nacrtaj sve projekcije".

8. Nacrtaj tlocrt i nacrt pravilne četverostrane prizme, kojoj je donja osnovka ABCD u ravnini E/70,-50,50/, ako je dijagonala te osnovke AC [A/50,25,z/, C/65,50,z/] , a visina prizme v = 60 mm!

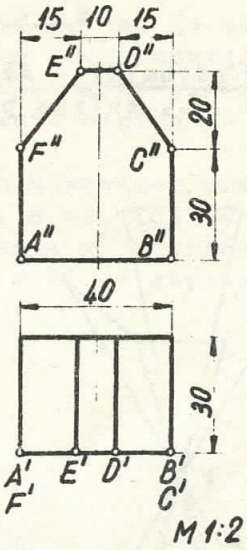
9. Nacrtaj sve projekcije pravilne šesterostrane prizme, kojoj je os SS_1 [S/30,25,20/, S_1/ 60,70,70//, ako je njezin osnovni brid dug 20 mm, a dva su njezina osnovna brida usporedna s π_1 !



Sl.252.



Sl.253.

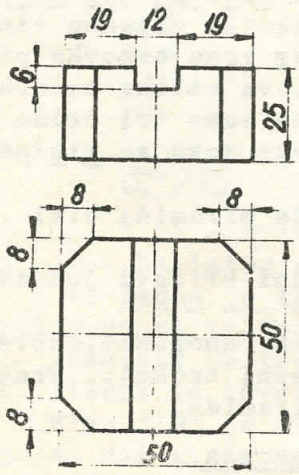


Sl.254.

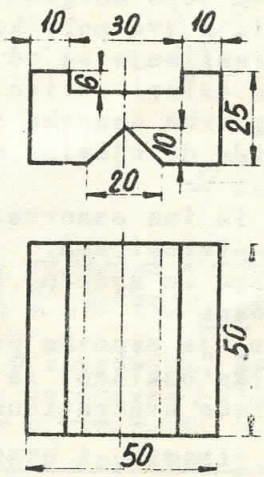
10. Nacrtaj sve projekcije pravilne peterostrane prizme, kojoj je os SS_1 [S/45,55,20/, S_1/20,30,65//], ako je promjer kružnice opisane oko osnovke Φ = 40 mm, a jedan je njezin osnovni brid usporedan s π_1 !

11. Nacrtaj u mjerilu 1:1 sve projekcije prizmatičnog tijela, kojemu je zadan tlocrt i nacrt u mjerilu 1:2 a/ na sl. 252., b/ na sl.253., c/ na slici 254!

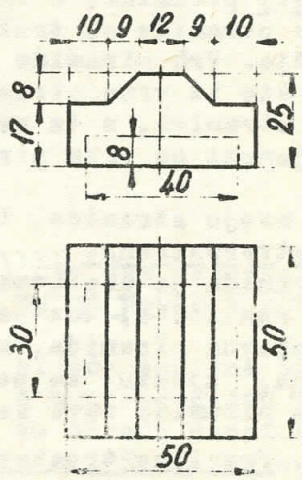
12. Nacrtaj u mjerilu 1:1 tlocrt i nacrt predmeta, kojemu je zadan tlocrt i nacrt u mjerilu 1 : 2 a/ na sl. 255., b/ na sl. 256., c/ na sl. 257., ako njegovi bridovi, koji su na tim slikama okomiti na ravnini π_2 , čine s π_2 kut od 60°!



Sl.255.



Sl.256.

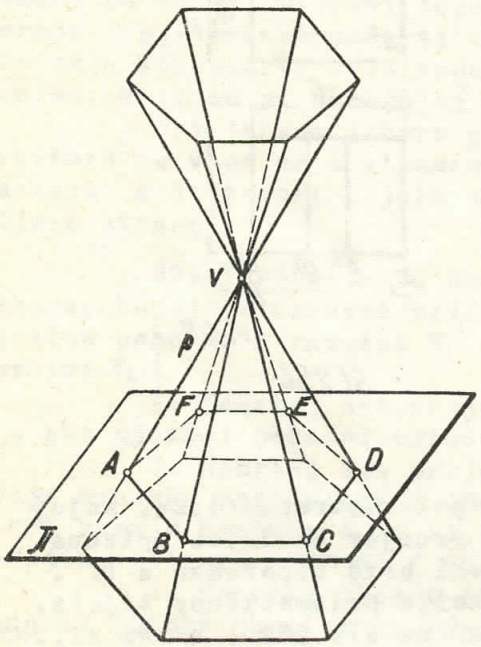


Sl.257.

13. Nacrtaj u mjerilu 1 : 1 stranocrt predmeta, koji je zadan slikom a/ 252, b/ 253., c/ 254., d/ 255., e/ 256., f/257., ako je položaj predmeta u prostoru i položaj stranocrtne ravnine Π_3 kao na sl. 251!

§12. PROJICIRANJE PIRAMIDE

90. O piramidi.- Ako se pravac p/ sl.258./, koji nije u ravnini mnogokuta ABCDE ..., skliže po stranicama toga mnogokuta, a pri tome prolazi čvrstom točkom V, on će opisati piramidastu plohu. Dio prostora, što ga omedjuje ta ploha, zove se piramidasti prostor. Pojedini položaji pravca p zovu se izvodnice, mnogokut ABCDEF provodnica, a točka V vrh piramidaste plohe. Ravnine, od kojih se sastoji piramidasta ploha, zovu se pobočke ili strane te plohe. Svake dvije susjedne pobočke sijeku se u pobočnom bridu piramidaste plohe.



Sl. 258.

Svaka ravnina, koja ide vrhom V i presijeca mnogokut ABCDEF siječe piramidastu plohu u izvodnicama, a paralelne ravnine sijeku tu plohu u sličnim mnogokutima, jer su homologne stranice tih mnogokuta medju sobom usporedne, a omjeri njihovih homolognih stranica jednaki.

Piramidasti prostor, koji je s jedne strane omedjen vrhom V, a s druge strane nekom ravninom, koja ne prolazi tim vrhom, zove se piramida. Ta ravnina siječe pobočke piramidaste plohe u mnogokutu, koji se zove osnovka ili baza piramide. Stranice toga mnogokuta su osnovni bridovi piramide, a vrhovi toga mnogokuta su vrhovi osnovke piramide. Pobočke piramide su trokuti, a sve pobočke piramide zajedno čine njezino pobočje. Vrh piramide V razlikuje se od nekog vrha osnovke piramide u tome, što iz vrha piramide izlazi toliko bridova koliko osnovka piramide ima stranica, a iz nekog vrha osnovke izlaze samo tri brida piramide. Udaljenost od vrha piramide do njezine osnovke zove se visina piramide.

Po broju stranica, što ih ima osnovka, može piramida biti trostrana, četverostrana, ... n-terostrana.

Piramida je uspravna, kad su njezini pobočni bridovi jednaki, a kad su oni različiti, ona je kosa.

Uspravna piramida, kojoj je osnovka pravilni mnogokut, zove se kraće pravilna, njezine su pobočke sukladni istokračni trokuti. Pravilna četverostrana piramida zove se kraće kvadratična piramida.

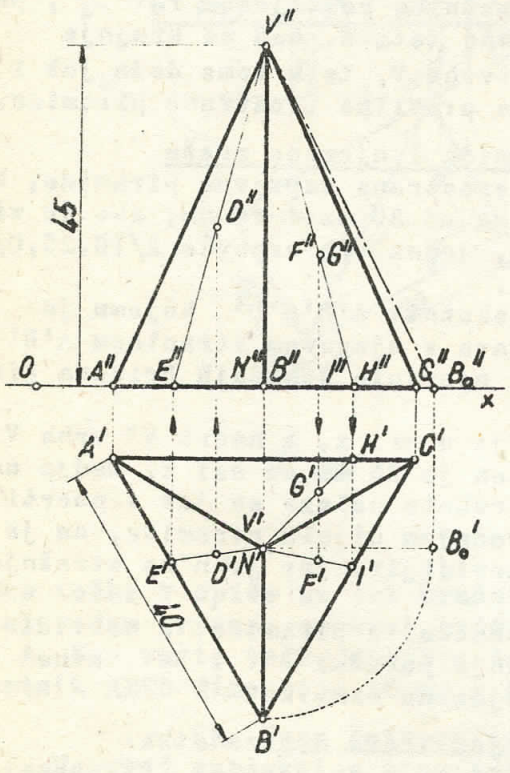
91. Pravilna trostrana piramida i njezina mreža

A.- Na sl. 259. nacrtan je tlocrt i nacrt pravilne trostrane piramide, kojoj je osnovni brid dug 40 mm, a visina v = 45 mm, ako je njezina osnovka ABC u ravnini Π_1, a osnovni brid AC usporedan s osi x.

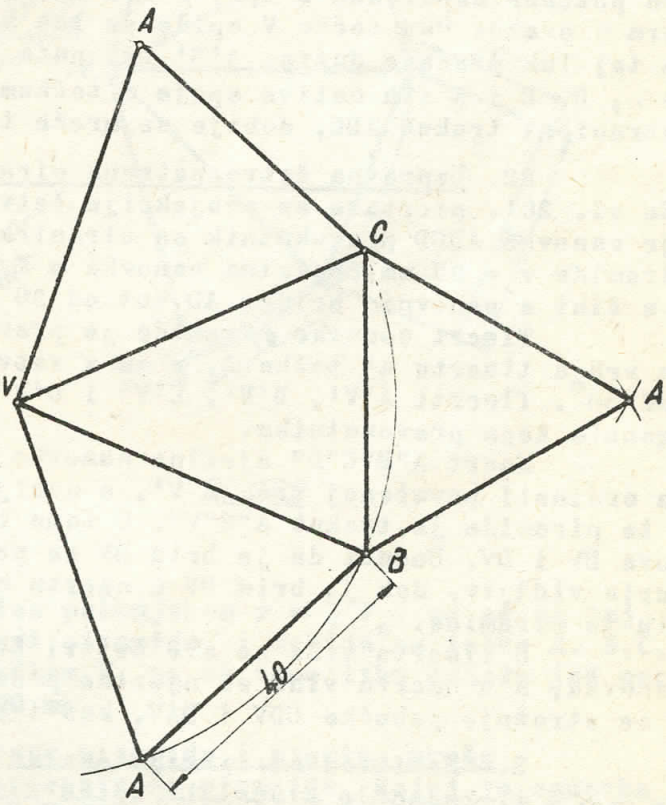
Tlocrt osnovke te piramide poklapa se s tom osnovkom, jer je ona u Π_1 , zbog toga je tlocrt osnovke piramide istostraničan trokut A'B'C', kojemu je stranica A'C' usporedna s osi x, a svaka je njegova stranica duga 40 mm. Budući da su pobočni bridovi pravilne trostrane piramide medju sobom jednaki i prema Π_1 jednako nagnuti, moraju tlocrti tih bridova biti medju sobom jednaki. Tlocrt V' vrha V mora zbog toga biti jednako udaljen od vrhova trokuta A'B'C', t.j. V' se nalazi u sjecištu simetrala stranica toga trokuta, a dužine A'V', B'V' i C'V' su tlocrti pobočnih bridova te piramide.

Nacrt A"B"C" njezine osnovke je u osi x, jer je osnovka u Π_1 , a nacrt V" vrha V je na ordinali povučenoj točkom V', a udaljen od osi x 45 mm, jer je visina piramide v = 45 mm. Medja nacrta te piramide je prema tome istokračni trokut A"C"V". U tome trokutu ucrtan je još i nacrt B"V" pobočnog brida BV.

Kad se ta piramida promatra u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_1 , vide se sve tri njezine pobočke, a ne vidi se osnovka, a kad se ona promatra u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_2 , vide se samo njezine prednje pobočke ABV i BCV, a ne vidi se stražnja pobočka ACV i osnovka ABC.



Sl. 259



Sl. 260

B.- Na istoj slici riješena su još i ova dva zadatka:

1. Zadan je tlocrt D' točke D, koja je na pobočki ABC; neka se konstruira nacrt te točke!

Zamisli se točkom D izvodnica, koja siječe osnovni brid AB u točki E. Tlocrt te izvodnice je pravac [V'D'], a u presjecištu toga pravca i dužine A'B' je tlocrt E' točke E. Sada se odredi nacrt E" točke E, koji je na osi x, pa je [V"E"] nacrt te izvodnice VE, na kojoj je točka D. Povuče li se zatim točkom D' ordinala, ona će presjeći nacrt te izvodnice u traženom nacrtu D" točke D.

2. Zadan je nacrt F" točke F, koja je na pobočki BCD; neka se konstruira tlocrt te točke!

Zamisli se točkom F izvodnica, koja siječe osnovni brid BC u točki I. Nacrt te izvodnice je pravac /V"F"/ , a u presjecištu toga pravca i dužine B"C" je nacrt I" točke I. Odredi se zatim tlocrt I' točke I, koji je na dužini B'C', pa je /V'I'/ tlocrt te izvodnice, a na tome tlocrtu mora biti traženi tlocrt F' točke F.

U zadatku je bilo istaknuto, da se točka F nalazi na pobočki BCD, a da to nije bilo istaknuto, taj bi zadatak imao dva rješenja, jer se s nacrtom F" točke F poklapa i nacrt G" one točke G sa pobočke ACV, koja je točka zaklonirca s točkom F s obzirom na ravninu π_2. Kad točkom I" povučemo ordinatu, ta presiječe tlocrt A'B'C' osnovke ABC u dvije točke H' i I', pa se na tlocrtu V'H' izvodnice VH mora nalaziti tlocrt G' točke G, i to u presjecištu pravca V'H' s ordinalom povučenom iz točke G"≡F".

C.- Mreža pravilne trostrane piramide sastoji se iz tri istokračna i jednog istostraničnog trokuta / sl. 260./. Budući da su kraci tih istokračnih trokuta jednaki pobočnim bridovima piramide, treba odrediti pravu veličinu jednog pobočnog brida piramide. Na sl. 259. odredi se prava veličina $B_0''V''$ brida BV pomoću okretanja toga brida oko vertikalne osi VN, dok on postane usporedan s π_2 , / čl. 47./, a zatim se mreža piramide konstruira ovako: Oko točke V opiše se luk kružnice polumjerom $r=V''B_0''$, pa se na taj luk prenese dužina A'B' tri puta kao tetiva. Kad se krajnje točke A, B, C i A tih tetiva spoje s točkom vrha V, te k tome doda još i istostranični trokut ABC, dobije se mreža te pravilne trostrane piramide.

92. Uspravna četverostrana piramida i njezina mreža

A.- Na sl. 261. nacrtane su projekcije četverostrane uspravne piramide, kojoj je osnovka ABCD pravokutnik sa stranicama od 30 mm i 20 mm, ako je visina piramide v = 35 mm, njezina osnovka u π_1, jedan vrh osnovke A/10,25,0/, a os x čini s osnovnim bridom AD kut od 30°.

Tlocrt osnovke piramide je pravokutnik A'B'C'D', kojemu je jedan vrh u tlocrtu A' točke A, a os x zatvara s njegovom stranicom A'D' kut od 30°. Tlocrti A'V', B'V', C'V' i D'V' njezinih pobočnih bridova čine dijagonale toga pravokutnika.

Nacrt A"B"C"D" njezine osnovke je u osi x, a nacrt V" vrha V je na ordinali povučenoj točkom V', a udaljen je 35 mm od osi x. Medja nacrta te piramide je trokut A"C"V". U tome trokutu nalaze se još i nacrti bridova BV i DV. Budući da je brid BV sa prednjem dijelu piramide, on je u nacrtu vidljiv, dok je brid DV u nacrtu nevidljiv, jer jepn na stražnjem dijelu te piramide.

U tlocrtu vide se sve četiri pobočke te piramide, a ne vidi se osnovka, a u nacrtu vide se njezine prednje pobočke ABV i BCV, a ne vide se stražnje pobočke CDV i DAV, kao i njezina osnovka.

B.- Na istoj slici riješena su još i ova dva zadatka:

1. Zadan je tlocrt E' točke E, koja je na pobočki ABV; neka se konstruira nacrt te točke!

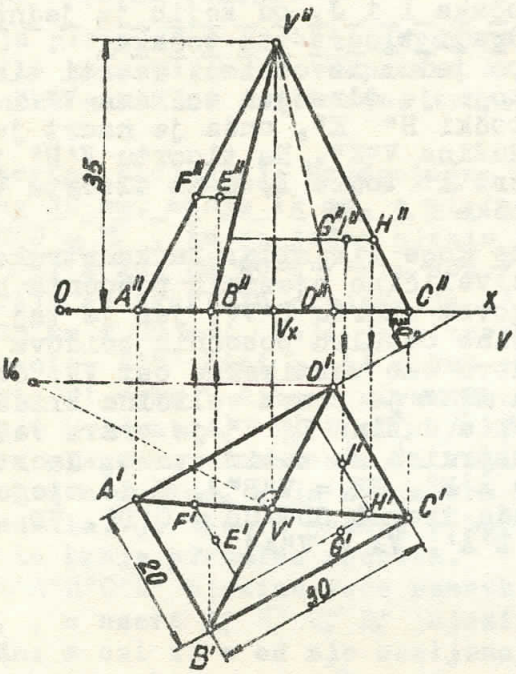
Taj bi se zadatak mogao riješiti na način, koji je prikazan u čl. 91, B 1, ali on je na slici 261. riješen tako, da je točkom zamišljena pomoćna poprečnica pobočke ABV, koja je usporedna s bridom AB. Njezin tlocrt ide točkom E' usporedo s A'B' i siječe A'V' u točki F', a njezin nacrt ide točkom F", koja je na A"V", i to usporedo s A"B". Nacrt E" točke E mora biti na nacrtu te poprečnice.

2. Zadani su nacrti C" ≡ I" točaka G i I, od kojih je jedna na pobočki BCV, a druga na pobočki CDV; neka se odrede tlocrti tih točaka!

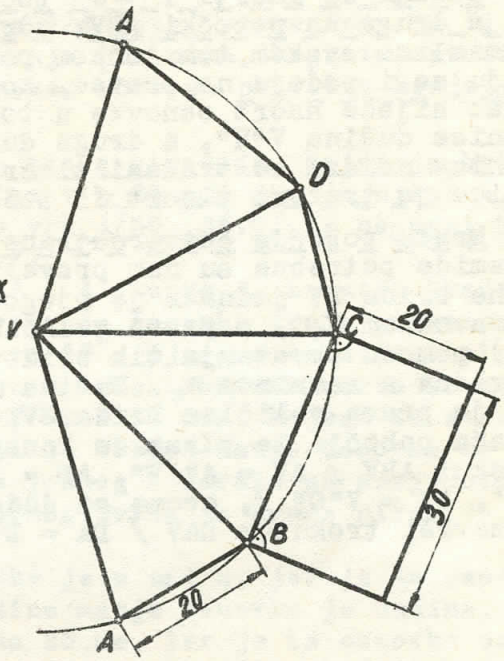
Zamislimo svakom tom točkom po jednu pomoćnu poprečnicu paralelnu s osnovnim bridom pobočke na kojoj se točka nalazi. Nacrti tih poprečnica, koji se poklapaju, idu točkom G"≡ I" paralelno s osi x i sijeku [illegible] u točki H". Točka H" je nacrt one točke H, u kojoj se te poprč-

nice u prostoru sijeku na pobočnom bridu CV. Ako sada odredimo tlocrt H' točke H, te će točkom H' ići tlocrt jedne poprečnice usporede s B'C' i tlocrt druge usporedo s C'D', a na tim tlocrtima pomoćnih poprečnica bit će traženi tlocrti točaka G i I.

D.- Mreža uspravne četverostrane piramide. Za konstrukciju mreže potrebna je prava veličina jednog pobočnog brida te piramide. Konstruiran je zbog toga pravokutni trokut D'V'V$_o$, u kojem je V'V$_o$ = V$_x$V", pa je njegova hipotenuza D'V$_o$ prava veličina brida DV / čl.17./. Mreža se te piramide / sl.262./ konstruira ovako:



Sl. 261.



Sl. 262.

Oko točke V opiše se luk kružnice polumjerom r = D'V$_o$, pa se na taj luk redom prenesu osnovni bridovi piramide, i dobiju se točke A, B, C, D i A. Sad se te točke spoje s točkom V, pa se tome liku dodade još pravokutnik ABCD dimenzija 30 mm x 20 mm.

93. Kosa četverostrana piramida i njezina mreža

A.- Nacrtaj projekcije kose četverostrane piramide, kojoj je osnovka paralelogram ABCD /A/20,10,0/, B/0,25,0/, C/10,35,0/, D/, a vrh V/50, 25,40/ ! (sl.263.).

Tlocrt osnovke je paralelogram A'B'C'D', a njezin nacrt je dužina B"D", koja je u osi x. Ako vrhove toga paralelograma spojimo s tlocrtom V' vrha V, dobijemo dužine V'A', V'B', V'C' i V'D', koje su tlocrti pobočnih bridova te piramide, od kojih dva, i to V'A' i V'C', pripadaju konturi tlocrta te piramide. U tlocrtu piramide nalaze se tlocrti pobočnih bridova BV i DV, te osnovnih bridova AD i CD. Budući da je brid BV na gornjem dijelu piramide, on je u tlocrtu vidljiv, dok su bridovi AD, CD i DV u tlocrtu nevidljivi, jer se oni nalaze na donjem dijelu te piramide.

Ako krajnje točke B" i D" nacrta osnovke piramide spojimo s nacrtom V" vrha V, zatvorili smo trokut B"D"V", koji je medja nacrta te piramide. U tom trokutu nalaze se nacrti pobočnih bridova CV i AV.

Brid CV je u nacrtu vidljiv, jer je on na prednjem dijelu piramide, kako je to iz tlocrta očigledno, dok je brid DV u nacrtu nevidljiv, jer se on nalazi na njezinom stražnjem dijelu.

B. Na istoj slici riješena su još ova dva zadatka:

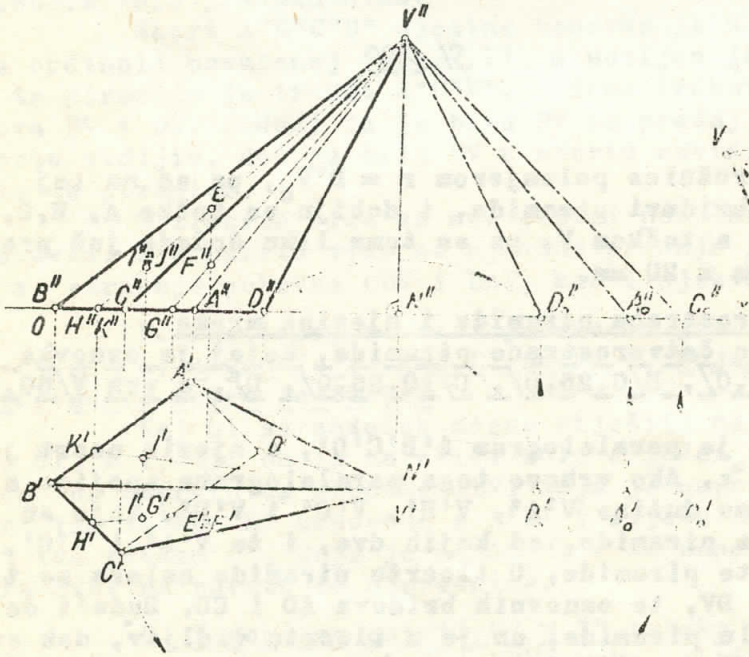
1. Zadani su tlocrti E' ≡ F' točaka E i F, od kojih je jedna na pobočki BCV, a druga na pobočki CDV; neka se odrede nacrti tih točaka!

Zamislimo svakom tom točkom po jednu izvodnicu. Tlocrti se tih izvodnica djelomično poklapaju i padaju na pravac, koji je odredjen točkama V' i E' ≡ F'. Ako taj pravac siječe paralelogram A'B'C'D' u točkama G' i H', onda je tlocrt jedne od tih izvodnica dužina V'G', a od druge dužina V'H'. Konstruiramo li sada nacrte V"G" i V"H" tih izvodnica, onda će na jednom od njih biti traženi nacrt E" točke E, a na drugom traženi nacrt F" točke F.

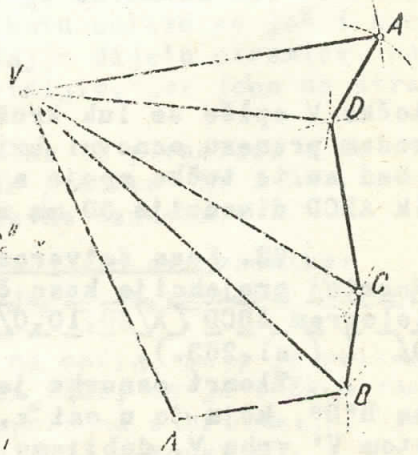
2. Zadani su nacrti I" ≡ J" točaka I i J, od kojih je jedna na pobočki BCV, a druga na pobočki ABV; odredi tlocrt tih točaka!

Zamislimo svakom tom točkom po jednu izvodnicu. Nacrti tih izvodnica poklapaju se i padaju na pravac, koji je odredjen točkama V" i I" ≡ J". Ako taj pravac siječe nacrt osnovke u točki H" K", onda je nacrt jedne od tih izvodnica dužina V"H", a druge dužina V"K". Na tlocrtu V'H' jedne od tih izvodnica nalazi se traženi tlocrt I' točke I, a na tlocrtu V'K' druge izvodnice je traženi tlocrt J' točke J.

C. Mreža pobočja četverostrane kose piramide. Za konstrukciju mreže te piramide potrebne su nam prave veličine njezinih pobočnih bridova. Prava veličina brida BV jednaka je njegovom nacrtu B"V", jer je taj brid usporedan s ravninom π_2, a prave veličine ostalih pobočnih bridova odrede se (sl. 263.) pomoću okretanja tih bridova oko vertikalne osi VN, dok one postanu usporedne s ravninom π_2. Dužina $A_0''V''$ je prava veličina brida AV, dužina $C_0''V''$ je prava veličina brida CV, a dužina $D_0''V''$ je prava veličina brida DV. Mreža pobočja te piramide konstruira se zatim ovako: Nacrta se (sl.264.) trokut ABV / AV = $A_0''V''$, AB = A'B', VB = V"B"/, a do njega trokut BCV/BC = B'C', VC = $V''C_0''$ /, ovome se doda trokut CDV/CD = C'D', VD = $V''D_0''$ /, pa se mreža završi trokutom DAV / DA = D'A', VA = $V''A_0''$ /.



Sl. 263



Sl. 264

Kad bismo toj mreži pobočja kose četverostrane piramide dodali još jedan paralelogram ABCD, koji je bio sukladan s njezinom osnovkom, dobili bismo mrežu čitave piramide.

94. Kvadratična krnja piramida i mreža njezinog pobočja

A.- O krnjoj piramidi. Kad piramidu presiječemo nekom ravninom, koja je usporedna s njezinom osnovkom, dobijemo dva dijela te piramide. Onaj dio, koji je između osnovke i te ravnine, zove se krnja piramida, a onaj dio, koji je između te ravnine i vrha, zove se dopunjak krnje piramide. Krnja piramida omeđena je s dvije osnovke i pobočkama. Osnovke su usporedni i slični mnogokuti, a pobočke su trapezi. Udaljenost između osnovaka krnje piramide je njezina visina.

Krnja piramida može biti uspravna ili kosa, prema tome da li je ona dio uspravne ili kose piramide. Uspravna krnja piramida, koja ima pravilne osnovke, a pobočke sukladne istokračne trapeze, zove se pravilna krnja piramida.

B. Nacrtaj projekcije kvadratične krnje piramide, kojoj je brid veće osnovke dug 30 mm, manje 12 mm, a visina v = 25 mm, ako je njezina veća osnovka ABCD u π_1, te je jedan njezin vrh A/50, 35, 0/, a osnovni brid AB čini s osi x kut od 60° / sl. 265./.

Najprije se nacrtaju projekcije A' i A" točke A, a zatim kvadrat A'B'C'D' / 30 mm x 30 mm/, koji je tlocrt veće osnovke krnje piramide, a kojemu stranica A'B' čini s osi x kut od 60°. Njegove se dijagonale sijeku u tlocrtu V' vrha V čitave piramide. U tome kvadratu ucrta se koncentrični manji kvadrat A_1' B_1' C_1' D_1' / 12 mm x 12 mm/, kojega su stranice usporedne s njegovim stranicama, a koji je tlocrt manje osnovke te krnje piramide. Svaka dužina, koja spaja vrh jednog kvadrata sa susjednim vrhom drugog kvadrata, je tlocrt jednog pobočnog brida te krnje piramide. Time je tlocrt te krnje piramide nacrtan.

Nacrt A"B"C"D" njezine veće osnovke je u osi x, jer je ta osnovka u ravnini π_1, a nacrt A_1'' B_1'' C_1'' D_1'' njezine manje osnovke je dužina, koja je usporedna s osi x, a od nje udaljena 25 mm, jer je ta osnovka usporedna s π_1, a visina te krnje piramide je v = 25 mm. Nacrti pobočnih bridova AA_1 i CC_1 čine s nacrtima osnovaka konturu nacrta te krnje piramide. U toj konturi nacrta nalaze se nacrti pobočnih bridova BB_1 i DD_1. Brid DD_1 je u nacrtu vidljiv, jer je on na prednjem dijelu te krnje piramide, kako je to iz tlocrta očevidno, dok je brid BB_1 u nacrtu nevidljiv, jer se nalazi na njezinom stražnjem dijelu.

Ako se na sl. 265. produže nacrti svih pobočnih bridova te krnje piramide, oni se moraju sjeći u točki V", koja je nacrt vrha čitave piramide.

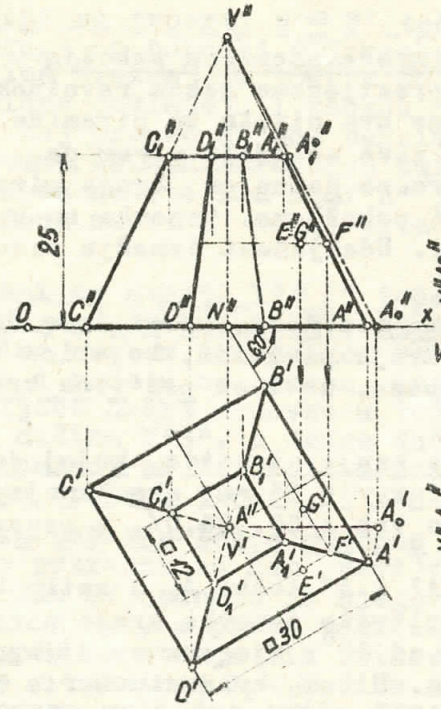
Od te krnje piramide vide se u tlocrtu sve njezine pobočke i manja osnovka, a u nacrtu samo dvije prednje pobočke AA_1D_1D i CC_1D_1D.

Na sl. 265. određena je još prava veličina $A_0''V''$ pobočnog brida AV čitave piramide, kao i prava veličina $A_0''A_1''$ pobočnog brida AA_1 krnje piramide, i to njihovim okretanjem oko vertikalne osi VN, dok oni postanu usporedni s ravninom π_2.

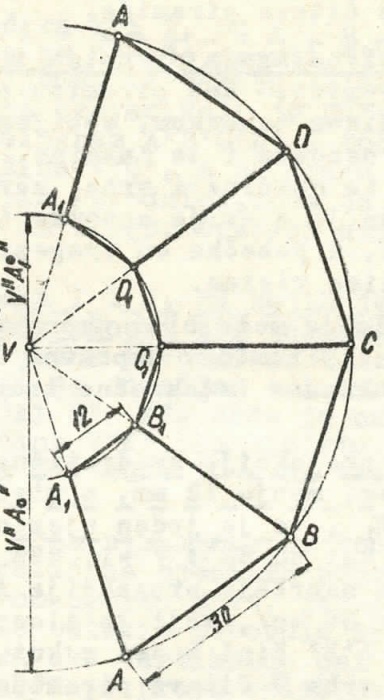
Na istoj slici riješen je još i ovaj zadatak:

C.- Zadani su nacrti E" ≡ G" točaka E i G, od kojih je jedna na pobočki AA_1D_1D, a druga na pobočki AA_1B_1B; neka se odrede tlocrti tih točaka!

Taj zadatak je riješen na način, koji je prikazan u čl. 92.B.2., a pomoću pomoćnih poprečnica, koje zamislimo tim točkama usporedo s osnovnim bridovima te krnje piramide. Nacrti tih poprečnica, koji se poklapaju, idu točkom E" ≡ G" usporedo s osi x i sijeku dužinu A"A_1'' u točki F", koja je nacrt one točke F, u kojoj se te poprečnice sijeku u pobočnom bridu AA_1. Ako sada odredimo tlocrt F' točke F, to će iz F' ići tlocrt jedne poprečnice usporede s A'D', i tlocrt druge usporede s A'B', a na tim tlocrtima pomoćnih poprečnica bit će traženi tlocrti E' i G' točaka E i G.



Sl. 265.



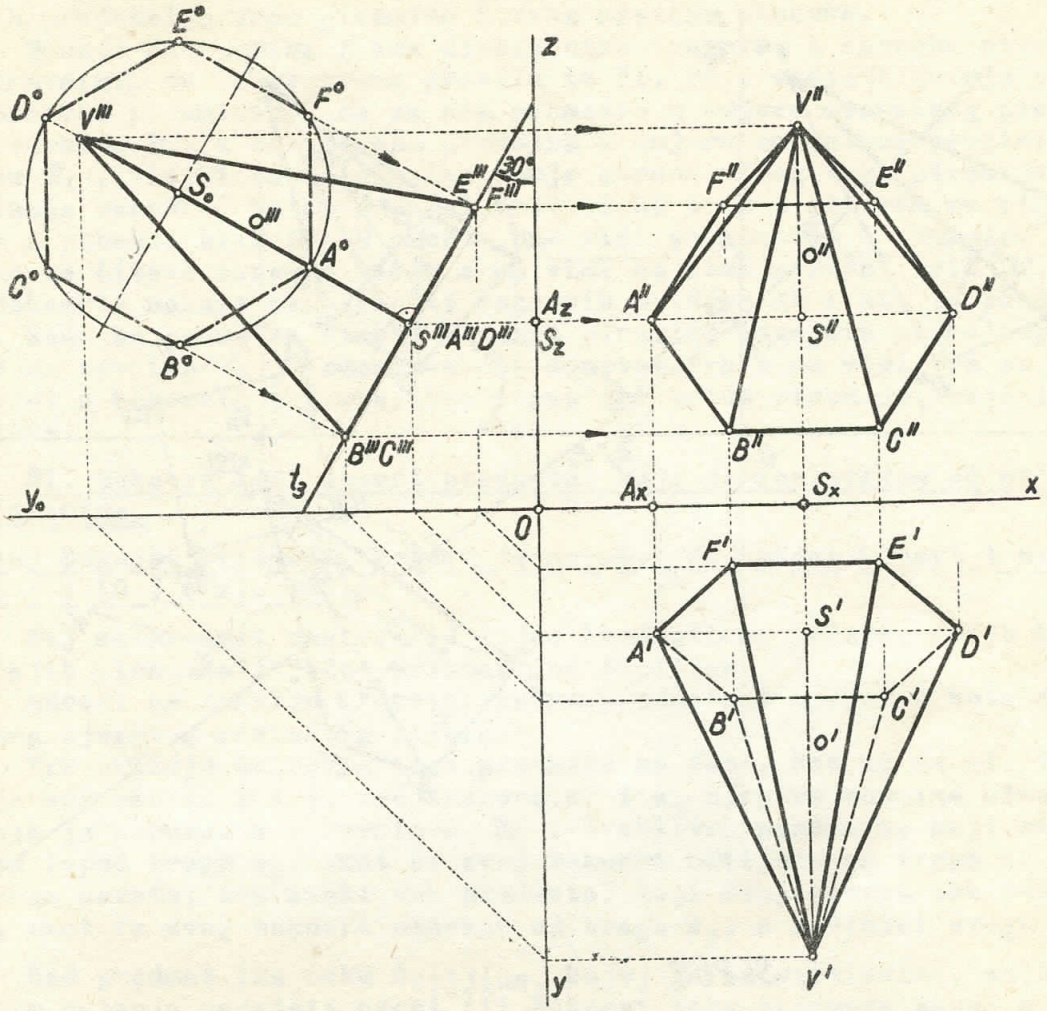
Sl. 266.

D. Mreža pobočja kvadratične krnje piramide. Ta se mreža sastoji od četiri sukladna istokračna trapeza, koje nacrtamo ovako: Oko točke V (sl.266.) opišemo dva kružna luka, jedan s polumjerom $r = A_0'' V''$, a drugi s polumjero $r_1 = A_1'' V''$. Povuče se zatim polumjer AV, pa se iz točke A prenese na veći luk četiri puta dužina A'B' kao tetiva, a na manji luk iz točke A_1 četiri puta dužina $A_1' B_1'$ kao tetiva. Kada se medju sobom spoje krajnje točke istoimenih tetiva, dobiju se četiri sukladna istokračna trapeza, koji čine traženu mrežu. Ako se sve konstrukcije točno izvedu, moraju se svi (produženi) kraci tih trapeza medju sobom sjeći u točki V.

95. Pravilna šesterostrana piramida, kojoj je osnovka u trećoj projicirajućoj ravnini. Treba nacrtati sve tri projekcije pravilne šesterostrane piramide, kojoj je središte osnovke S(35, 17, 25), osnovni brid 2o mm dug, a visina v = 5o mm, ako je ravnina njezine osnovke okomita na ravnini Π_3 i čini s ravninom Π_2 kut od 3o°, te su dva njezina brida okomita na Π_3 I (sl.267).

Najprije treba nacrtati sve tri projekcije osnovke ABCDEF na način istumačen u čl. 68.B. Točkom S povuče se treći trag t_3 ravnine osnovke T, tako da on čini s osi z kut od 3o°. Odredi se zatim preložaj S_0 središta osnovke S oko traga t_3 na ravnini Π_3 ($S''' S_0 \perp t_3$, $S''' S_0 = S_z S''$) i konstruira se šesterokut $A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ E^\circ F^\circ$, kojemu su stranice duge 2o mm, a dvije su od njih okomite na t_3. Pomoću toga šesterokuta konstruira se najprije bokocrt osnovke, koji je na t_3. Iz preložaja i bokocrta osnovke nacrta se zatim njezin nacrt, na pr. $A_z A'' = A''' A^\circ$, a na kraju se pomoću bokocrta i nacrta osnovke konstruira njezin tlocrt, na pr. $A_x A^\circ = A_z A'''$.

Os piramide, na kojoj je vrh piramide V, ide točkom S okomito na ravninu T, pa su njezine projekcije o' i o'' okomite na osi x, dok je njezin bokocrt o''' okomit na t_3. Budući da je ta os usporedna s Π_3, projicira se dužina SV, koja je na njoj, u pravoj veličini na Π_3, pa je $S''' V''' = 5o$ mm.



Sl.267.

Pomoću bokocrta V''' vrha V odredi se zatim njegov nacrt V'' na o'' i tlocrt V' na o', a na kraju se nacrtaju tlocrti i nacrti svih pobočnih bridova te piramide.

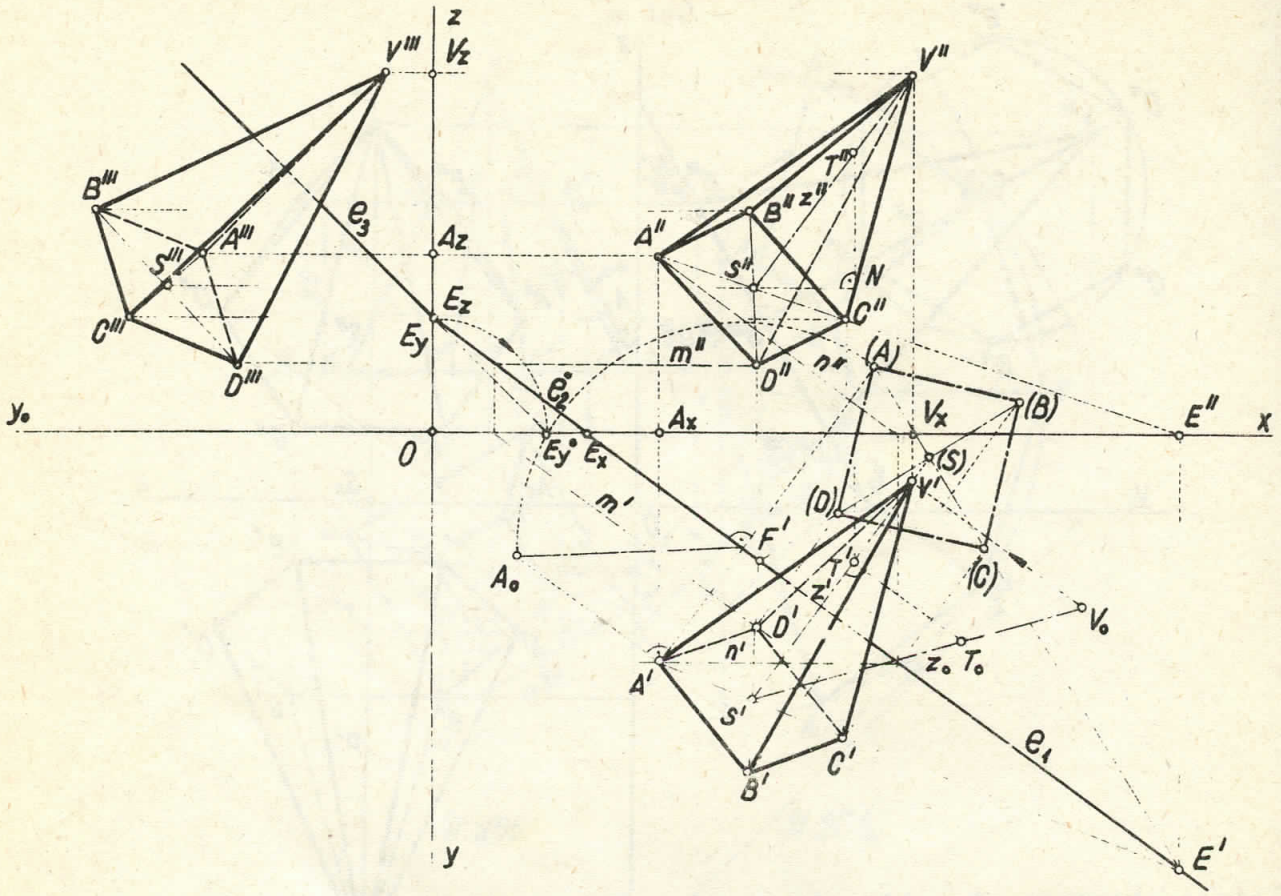
U konturi tlocrta te piramide nalaze se tlocrti njezinih pobočnih bridova EV, FV, BV i CV, kao i osnovnih bridova AB, BC i CD. Iz nacrta ili iz bokocrta očevidno je, da su bridovi EV i FV na gornjoj, a bridovi BV, CV, AB, BC i CD na donjoj polovini te piramide, pa se zbog toga u tlocrtu vide bridovi EV i FV, a ne vide bridovi BV, CV, AB, BC i CD.

U konturi nacrta te piramide nalaze se nacrti njezinih pobočnih bridova AV, BV, CV i DV, kao i nacrt osnovnog brida EF. Budući da se svi ti pobočni bridovi nalaze na prednjoj polovini piramide, kako je to iz tlocrta očevidno, svi se oni u nacrtu vide, jedino se osnovni brid EF u nacrtu ne vidi, jer je on na stražnjoj polovini te piramide.

96. Kvadratična piramida, kojoj je osnovka u općoj ravnini

Neka se nacrtaju sve tri projekcije kvadratične piramide, kojoj je osnovka ABCD u ravnini E/20,-15,15/, ako je dijagonala njezine osnovke AC /A/30,30,z/, C/55,40,z// , a visina v = 45 mm . (Sl.268.)

Projekcije osnovke ABCD nacrtat ćemo na način istumačen u čl. 70. Pomoću sutražnice n drugoga traga, položene točkom A, odredimo najprije nacrt A'' te točke, a zatim nadjemo nacrt C'' točke C pomoću nacrta A''E'' produžene dijagonale, kojoj je tlocrt A'E'. Konstruiramo potom preložaj (A)(C) dijagonale AC na ravnini π_1 oko prvoga traga e_1 ravnine E, a



Sl. 268.

pomoću njega nacrtamo kvadrat (A) (B) (C) (D), kojega se dijagonale sijeku u točki (S). Odredimo zatim tlocrt S' i nacrt S" točke S, koja je na dijagonali AC. Ako produžena dijagonala (B) (D) siječe prvi trag e_1 u točki F, onda je pravac [F'S'] tlocrt te produžene dijagonale, a na njemu se nalazi tlocrt B' točke B i tlocrt D' točke D. Nacrte točaka B i D ne možemo odrediti pomoću nacrta produžene dijagonale [S F], jer se njezin nacrt skoro poklapa s ordinalom povučenom točkom S', pa zbog toga odredimo nacrt D" točke D pomoću sutražnice m prvoga traga, a nacrt B" točke B pomoću jednakosti dužina SB i SD, t.j. mora biti S"B" = S"D". Tako je odredjen tlocrt i nacrt osnovke ABCD, a njezin bokocrt nadjemo na najkraći način pomoću jednakosti $A_z A'''$ = $A_x A'$ i t.d.

Ako se iz točke S povuče zraka z okomito na ravninu osnovke E, na njoj se nalazi vrh V piramide. Projekcije z' i z" te zrake idu točkama S', S", a okomite su na istoimenim tragovima ravnine E. Projekcije vrha V, koji je na toj zraci z, mogle bi se odrediti na način, koji je prikazan na sl. 249., ali one se mogu naći i na način, koji je istumačen u čl. 21, i to ovako: Na projekcijama zrake z označe se projekcije T' i T" koje god njezine točke T. Odredi se zatim prava veličina $S'T_o$ dužine ST pomoću diferencionog trokuta S'T'T_o [T'T_o ⊥ S'T', T'T_o = N T"]. Sada se na preloženoj zraci z_o = [S'T_o] nadje točka V_o, koja je od točke S' udaljena za visinu piramide v = 45 mm, pa se pomoću te točke odredi tlocrt V' i nacrt V" vrha V, dok se njegov bokocrt V''' nadje na poznati najkraći način: V''' V_z = V' V_x.

Nacrtaju se potom projekcije pobočnih bridova piramide spajanjem istoimenih projekcija vrha piramide i vrha njezine osnovke.

Budući da ravnina E ima divergentne tragove, a osnovka piramide je u toj ravnini, to će se, prema pravilu iz čl. 28., vidjeti gornja strana ravnine osnovke piramide, kada se ona promatra u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_1, a kad se ona promatra u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_2, vidjet će se njezina donja strana. Zbog toga piramida u tlocrtu zaklanja osnovku, pa se njezini bridovi AD i CD u tlocrtu ne vide, a isto tako i pobočni brid DV. U nacrtu pak vidi se osnovka i piramida s donje strane, pa se čitava osnovka vidi, a ne vidi se samo pobočni brid DV. U konturi bokocrta nalaze se bokocrti osnovnih bridova AB i AD, te pobočnih bridova AV i CV. Kada se promatra tlocrt ili nacrt piramide u smjeru normalnog projiciranja na ravninu Π_3, izlazi, da se osnovni vrh A ne vidi, pa se zbog toga ne vidi u bokocrtu taj vrh, kao i sva tri brida piramide, koji izlaze iz toga vrha.

97. Bokocrt i stranocrt predmeta, koji je sastavljen od prizama i krnje piramide.

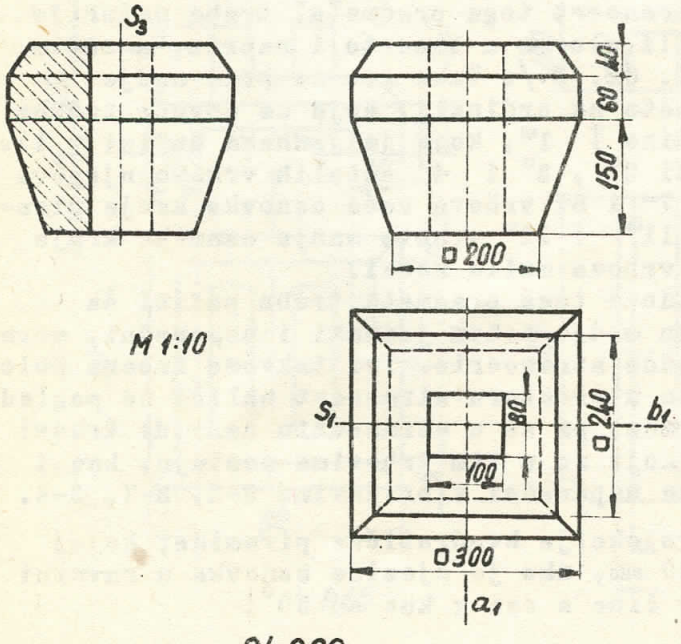
A.- Nacrtaj bokocrt predmeta, kojemu je na sl. 269. zadan tlocrt i nacrt u mjerilu 1 : 10 ! (sl. 269.)

Taj se predmet sastoji od jedne kvadratične prizme, dviju kvadratičnih krnjih piramida i jedne prizmatične šupljine.

Odredi na temelju tlocrta, nacrta predmeta i njegovih kota dimenzije svakog njegovog sastavnog dijela.

Pri crtanju bokocrta toga predmeta ne ćemo, kao ni na sl. 250. upotrebljavati osi x, y i z, već tragove s_1 i s_3 njegove ravnine simetrije Σ, koja je usporedna s ravninom Π_2. Svaki vrh predmeta, koji svoj tlocrt ima ispod traga s_1, imat će svoj bokocrt nalijevo od traga s_3, a u visini svoga nacrta; dok svaki vrh predmeta, koji svoj tlocrt ima povrh traga s_1, imat će svoj bokocrt nadesno od traga s_3, a u visini svoga nacrta.

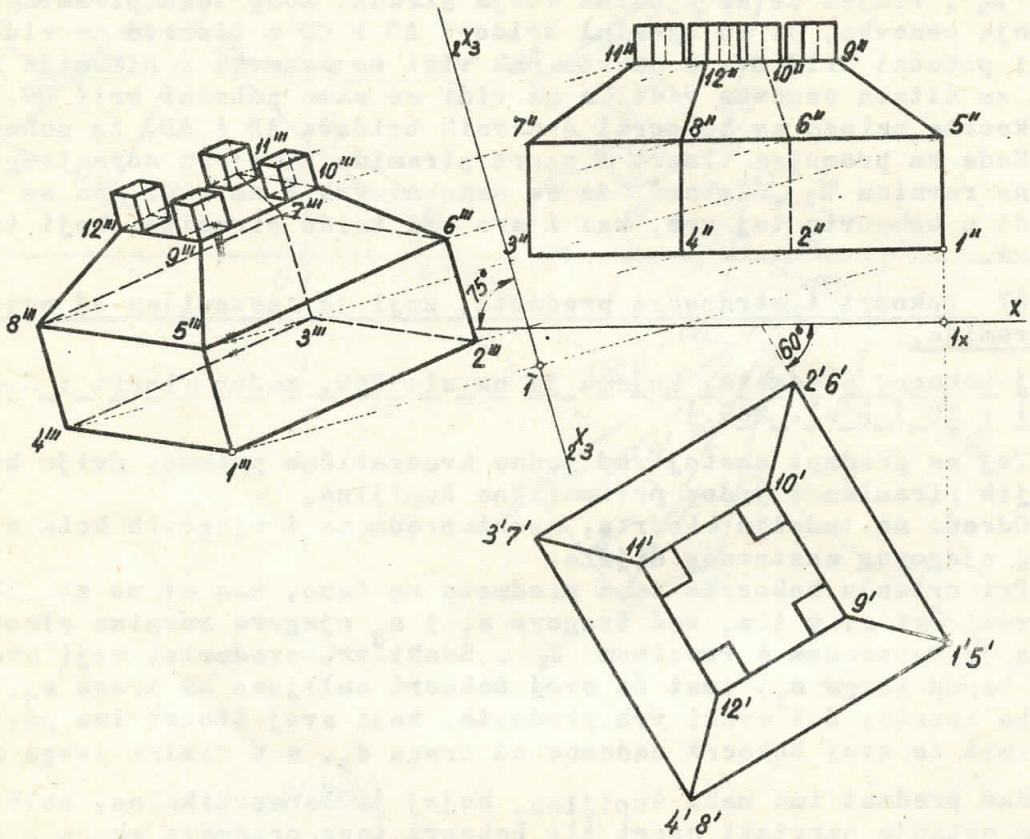
Kad predmet ima neku šupljinu, kojoj je os vertikalna, običava se u tehničkom crtanju nacrtati nacrt ili bokocrt toga predmeta skupa s dva njegova ravna presjeka, a ravnine tih presjeka zamislimo da idu osju njegove šupljine.



Sl. 269.

Tako je na sl. 269. nacrtan bokocrt zadanog predmeta s dva njegova osna presjeka, medju kojima se nalazi njegova prednja desna četvrtina. Bokocrt predmeta crtan je bez njegove prednje desne četvrtine. Onaj presjek predmeta, koji je usporedan s Π_3, a ima prvi trag a_1, projicira se na Π_3 u pravoj veličini, i taj je šrafiran, a onaj presjek, koji je okomit na Π_3, a ima prvi trag b_1, projicira se na Π_3 na tragu s_3. Na desnoj polovini toga bokocrta vidi se bokocrt vanjskog dijela njegove desne stražnje četvrtine, a na lijevoj polovini toga bokocrta vidi se bokocrt unutrašnjeg dijela njegove lijeve stražnje četvrtine. Pomoću tako izvedenih presjeka predmeta bolje se vidi u bokocrtu njegov vanjski i unutrašnji oblik.

B.- Nacrtaj stranocrt predmeta, kojemu je zadan tlocrt i nacrt na sl. 270., ako je stranocrtana ravnina Π_3 okomita na Π_2, a čini s Π_1 kut od 75°! (sl. 270.)



Sl. 270.

Na tome predmetu nalaze se jedna kvadratična prizma, jedna kvadratična krnja piramida i četiri male kocke. Nova os $_2x_3$ čini s osi x kut od 75°. Da bi se mogao nacrtati stranocrt toga predmeta, treba najprije svaki njegov vrh označiti brojem ili slovom u tlocrtu i nacrtu, a zatim konstruirati njegov stranocrt (šl. 62. B./. Tako se, na pr., nadje stranocrt $1'''$ vrha 1 osnovke predmeta na ordinali, koja se povuče točkom $1''$ okomito na os $_2x_3$, a pomoću dužine $\overline{1\ 1'''}$, koja je jednaka dužini $_1x1'$. Na jednak se način nadju stranocrti $2'''$, $3'''$ i $4'''$ ostalih vrhova njegove osnovke, zatim stranocrti $5'''$, $6'''$, $7'''$ i $8'''$ vrhova veće osnovke krnje piramide, kao i stranocrti $9'''$, $10'''$, $11'''$ i $12'''$ vrhova manje osnovke krnje piramide, a na kraju i stranocrti vrhova malih kocki.

Pri crtanju stranocrta bridova toga predmeta treba paziti na to, da svi njegovi bridovi, koji su medju sobom jednaki i usporedni, moraju imati medju sobom jednake i usporedne stranocrte. Pri takvome izboru položaja stranocrtne ravnine i predmeta u prostoru stranocrt naliči na pogled na taj predmet odozgo s lijeve strane, pa se u stranocrtu ne vide vrhovi 3, 7 i 11 i svi bridovi predmeta, koji se u tim vrhovima sastaju, kao i svi oni bridovi na kockama, koji su usporedni s bridovima 3-2, 3-7, 3-4.

98. Vježbe.- 1. Nacrtaj projekcije kvadratične piramide, kojoj osnovni brid ima 35 mm, a visina 50 mm, ako je njezina osnovka u ravnini Π_1, te dva njezina osnovna brida čine s osi x kut od 60°!

2. Nacrtaj projekcije pravilne šesterostrane piramide, kojoj osnovni brid ima 25 mm, a visina 50 mm, ako je njezina osnovka u ravnini π_2 , te su dva njezina osnovna brida usporedna s osi x. Konstruiraj mrežu te piramide!

3. Nacrtaj projekcije četverostrane kose piramide, kojoj je osnovka paralelogram ABCD [A/10,30,0/, B/30,70,0/, C/50,50,0/,D], a vrh V/90,40,60/! Konstruiraj njezinu mrežu!

4. Nacrtaj projekcije pravilne šesterostrane krnje piramide, kojoj veći osnovni brid ima 25 mm, manji 15 mm, a visina 40 mm, ako je njezina manja osnovka u π_1 , i to ispod veće osnovke, a dva su njezina osnovna brida okomita na π_2 ! Konstruiraj mrežu te krnje piramide!

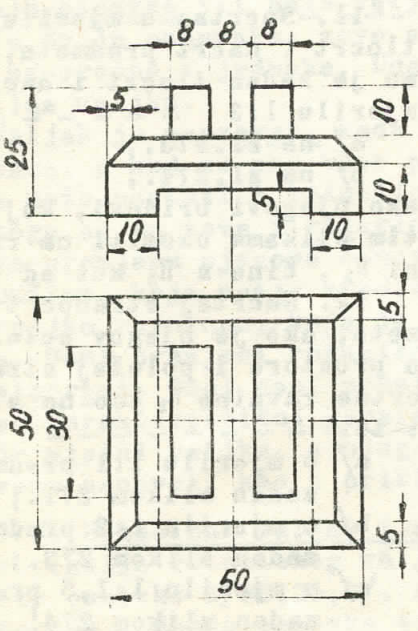
5. Nacrtaj projekcije pravilne peterostrane šuplje piramide, kojoj je osnovka ABCDE okomita na π_2 , ako je njezin osnovni brid AB [A/20, 10,50/, B/35,10,65/] , visina v = 50 mm, te se vrh piramide nalazi ispod ravnine osnovke!

6. Nacrtaj sve projekcije pravilne a/ peterostrane, b/ šesterostrane piramide, kojoj je osnovka u ravnini E/-100,80,100/, ako je središte njezine osnovke S/-35,30,z/, jedan vrh osnovke A/-20,25,z/, a visina piramide v = 60 mm!

7. Nacrtaj sve projekcije pravilne šesterostrane piramide, kojoj je osnovka ABCDEF u ravnini E/70,-50,50/, ako je dijagonala osnovke AD [A/50,25,z/, D/65,50,z/] , a visina piramide v=60!

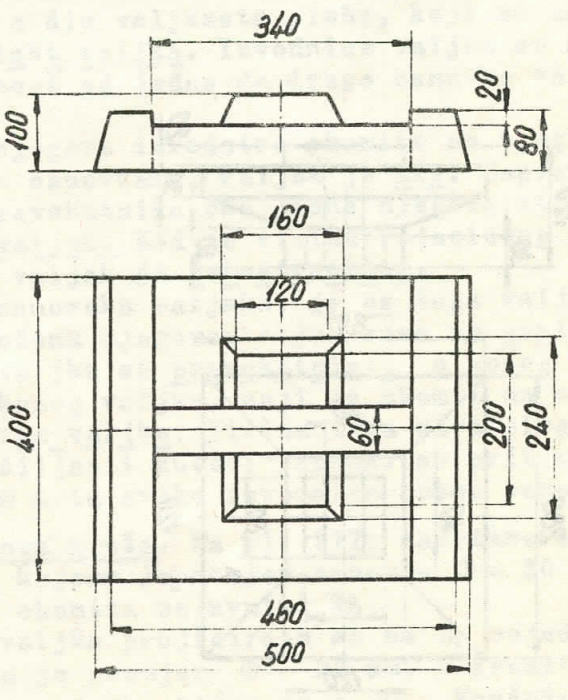
8. Nacrtaj sve projekcije kvadratične piramide, kojoj je središte osnovke S/30,25,20/, a vrh V/60,70,70/, ako je njezin osnovni brid dug 25 mm, a jedna dijagonala njezine osnovke čini kut od 60° s prvim tragom ravnine osnovke!

9. Nacrtaj sve projekcije pravilne peterostrane piramide, kojoj je središte osnovke S/45,55,20/, a vrh V/20,30,65/, ako je promjer kružnice opisane oko osnovke Φ = 40 mm, a jedan je njezin osnovni brid usporedan s π_1 !



M 1:1,5

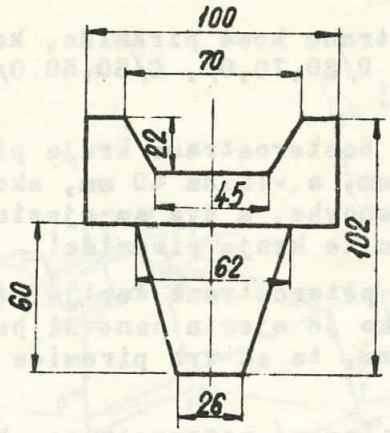
Sl. 271.



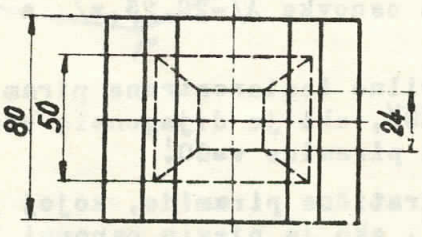
M 1:10

Sl. 272.

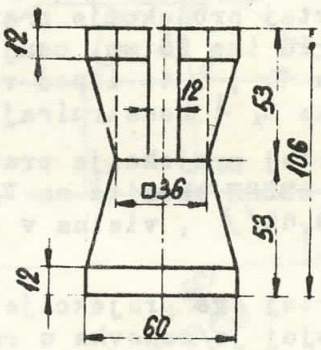
10. Nacrtaj bokocrt predmeta bez njegove prednje desne četvrtine..



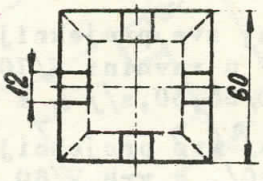
M 1:3



Sl.273.



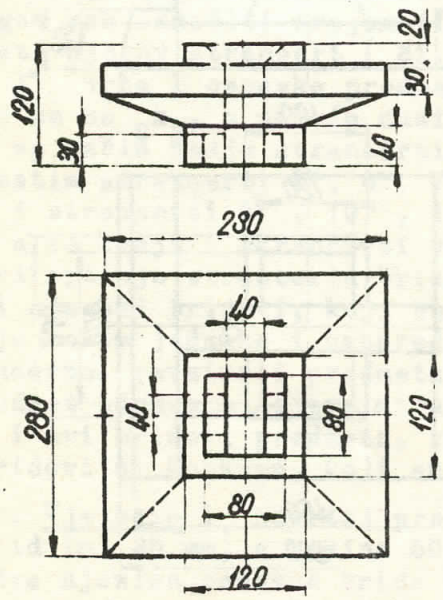
M 1:3



Sl.274.

i to:

a/ u mjerilu 1 : 1 predmet zadan slikom 271;
b/ u mjerilu 1 : 7,5 predmet zadan slikom 272;
c/ u mjerilu 1 : 3 predmet zadan slikom 273!



M 1:7,5

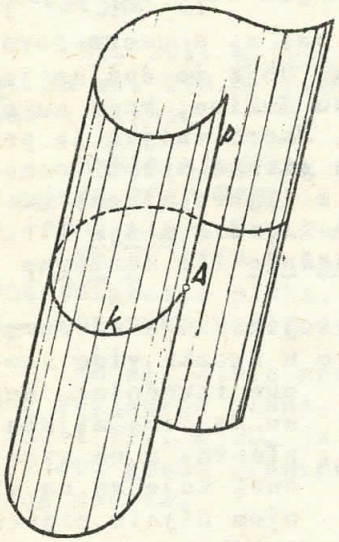
Sl.275.

11. Nacrtaj u mjerilu 1:2 tlocrt . nacrt predmeta, kojemu je zadan tlocrt i nacrt u mjerilu 1:3
a/ na sl.273.,
b/ na sl.274.,
ako njegovi bridovi, koji su na tim slikama okomiti na ravnini Π_2 , čine s Π_2 kut od 60°!

12. Nacrtaj stranocrt predmeta, ako je njegov položaj u prostoru i položaj stranocrtne ravnine Π_3 kao na sl.270! i to:
a/ u mjerilu 1:1 predmet zadan slikom 271.;
b/ u mjerilu 1:2 predmet zadan slikom 273.;
c/ u mjerilu 1:1,5 predmet zadan slikom 274!

§13. PROJICIRANJE VALJKA

99. O valjku. Ako se pravac p / sl. 276./ giblje u prostoru tako, da siječe zadanu krivulju k samo u jednoj točki, a da pri tome ostaje neprestano usporedan sa svojim početnim položajem, on opisuje oblu plohu, koja se zove valjkasta ili cilindrična ploha. Dio prostora, što ga omedjuje ta ploha, zove se valjkasti prostor. Krivulja k zove se provodna krivulja, a pojedini položaji pravca p zovu se izvodnice ili stranice valjkaste plohe.



Sl.276.

Istu valjkastu plohu može opisati i krivulja k, ako se ona giblje tako, da ostaje neprestano usporedna sa svojim početnim položajem, a da jedna njezina točka A opisuje pravac p. Svaka točka krivulje k opisuje tada po jednu izvodnicu valjkaste plohe.

Svaka ravnina, koja siječe krivulju k, a usporedna je s pravcem p, siječe valjkastu plohu u izvodnicama. Svaka ravnina, koja nije usporedna s izvodnicama valjkaste plohe, siječe tu plohu u nekoj krivulji. Dvije usporedne ravnine, koje nisu usporedne s izvodnicama valjkaste plohe, sijeku tu plohu u sukladnim krivuljama.

Valjkasta ploha može biti kružna, eliptična, hiperbolična ili parabolična, prema tome, da li je krivulja k kružnica, elipsa, hiperbola, ili parabola, a one se jednim imenom zovu valjkaste plohe drugoga reda.

Dio valjkastog prostora, koji se nalazi izmedju dviju usporednih ravnina, koje nisu usporedne s izvodnicama valjkaste plohe, zove se valjak. Sukladne krivulje, u kojima usporedne ravnine sijeku valjkastu plohu, omedjuju osnovke ili baze valjka, a dio valjkaste plohe, koji se nalazi izmedju dviju osnovaka, zove se plašt valjka. Izvodnice valjka su medju sobom usporedne i jednake. Udaljenost od jedne do druge osnovke valjka zove se visina valjka.

Valjak je uspravan, kada su njegove izvodnice okomite na njegovim osnovkama, a kad su one kose prema osnovkama, valjak je kos. Uspravni kružni valjak može nastati i rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice, zbog toga se on zove i rotacioni valjak. Kad je visina rotacionog valjka jednaka promjeru njegove osnovke, valjak je istostraničan.

Dužina, koja spaja središta osnovaka valjaka, je os toga valjka. Presjek valjka ravninom, koja je položena njegovom osju, zove se osni presjek valjka. Osni presjeci rotacionog valjka su pravokutnici, a kosog valjka su paralelogrami. Onaj osni presjek kosog valjka, koji je okomit na osnovkama, zove se karakteristični paralelogram valjka. Visina toga paralelograma jednaka je visini valjka, a njegovi šiljasti kutovi jednaki su priklonom kutu osi prema osnovci, kao i priklonom kutu svake izvodnice prema osnovci.

100. Rotacioni valjak i njegova mreža. Na sl. 277. nacrtane su sve tri projekcije rotacionog valjka, kojemu je promjer osnovke $\Phi = 30$ mm, središte osnovke S/25,25,0/, a os okomita na ravnini π_1.

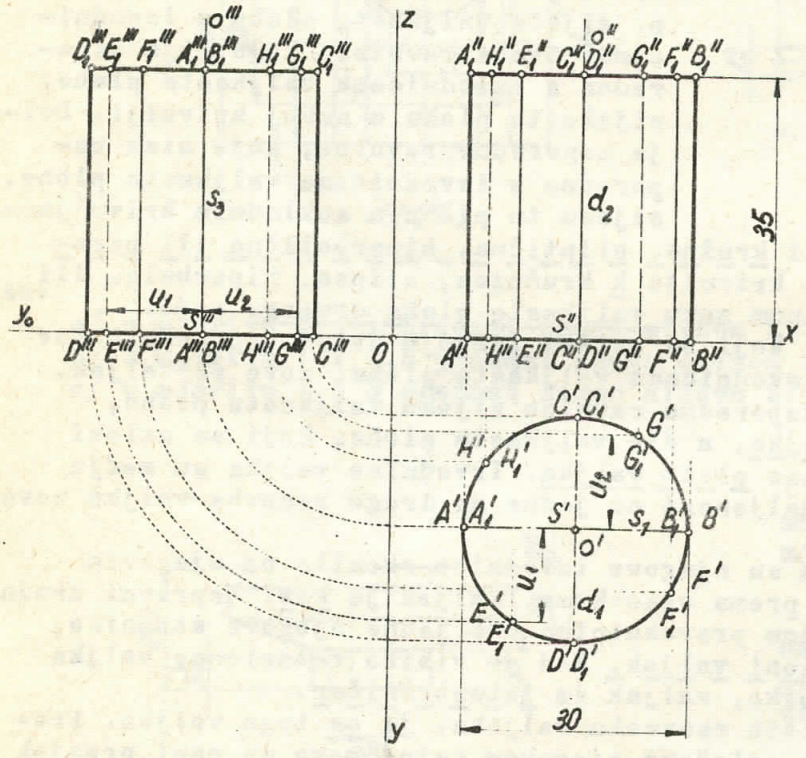
Gornja i donja osnovka toga valjka projiciraju se na π_1 zajedno, i to u pravoj veličini kao krug, kojemu je promjer $\Phi = 30$ mm, a središte S', jer su te osnovke jedna iznad druge, a usporedne su s π_1. Kružnica, koja omedjuje taj krug, je tlocrt plašta valjka, a svaka točka te kružnice je

tlocrt jedne izvodnice valjka, jer su izvodnice toga rotacionog valjka okomite na π_1 . Središte toga kruga ujedno je i tlocrt o' osi valjka.

Ravnina Σ , koja je položena osju valjka usporedo s ravninom π_2 , i ima tragove $s_1/s_1 \parallel x/$ i $s_3/s_3 \parallel z/$, siječe plašt valjka u izvodnicama AA_1 i BB_1, te dijeli valjak na prednji i stražnji dio. Na prednjem dijelu toga valjka su izvodnice EE_1, DD_1 i FF_1, a na stražnjem CC_1, GG_1 i HH_1.

Nacrt donje osnovke je dužina A"B", koja je u osi x, a nacrt gornje osnovke je dužina A_1'' B_1'' , koja je usporedna s osi x. Obje te dužine jednake su promjeru osnovke valjka. Nacrti izvodnica su dužine, koje su okomite na osi x, i jednake su izvodnicama u prostoru. Nacrt valjka je pravokutnik A"B"B_1'' A_1'' , koji omedjuju s donje i gornje strane nacrti osnovaka, s desne strane nacrt B"B_1'' izvodnice BB_1, a s lijeve strane nacrt A"A_1'' izvodnice A A_1. Budući da su nacrti izvodnica AA_1 dio medje ili konture nacrta valjka, to se te izvodnice zovu medjašnje ili konturne izvodnice nacrta valjka.

Kad promatramo taj valjak u smjeru normalnog projiciranja na ravninu π_2 , vidimo samo prednji dio njegovog plašta, pa se u nacrtu vide samo one izvodnice, koje su na tome dijelu plašta, a ne vide se one, koje su na stražnjem dijelu plašta valjka.



Sl. 277.

Ravnina Δ , koja je položena osju toga valjka usporedo s ravninom π_3, i ima tragove d_1 i d_2/ $d_1 \perp x$, i $d_2 \perp x$/, siječe plašt valjka u izvodnicama CC_1 i DD_1, te dijeli valjak na desni i lijevi dio. Na desnom dijelu toga valjka su izvodnice FF_1 BB_1 i GG_1, a na lijevom EE_1, AA_1 i HH_1.

Bokocrt toga valjka je pravokutnik D''' C''' C_1''' D_1''', koji omedjuju s donje i gornje strane bokocrti osnovaka, a s desne i lijeve strane bokocrti C''' C_1''' i D''' D_1''' izvodnica CC_1 i DD_1. Izvodnice CC_1 i DD_1 zovu se medjašnje ili konturne izvodnice bokocrta valjka, jer bokocrti tih izvodnica pripadaju medji ili konturi bokocrta valjka.

Kad promatramo valjak u smjeru normalnog projiciranja na π_3 , vidimo samo desni dio njegovog plašta, pa se u bokocrtu vide samo one izvodnice, koje su na tom dijelu plašta, a ne vide se one, koje su na lijevom dijelu plašta valjka.

Na sl. 277. prikazano je još i to, kako se pomoću kota u_1 i u_2 i tragova s_1 i s_2 ravnine Σ mogu odrediti bokocrti $E'''\ E_1'''$ i $G'''\ G_1'''$ izvodnica EE_1 i GG_1, a bez upotrebe osi y i z.

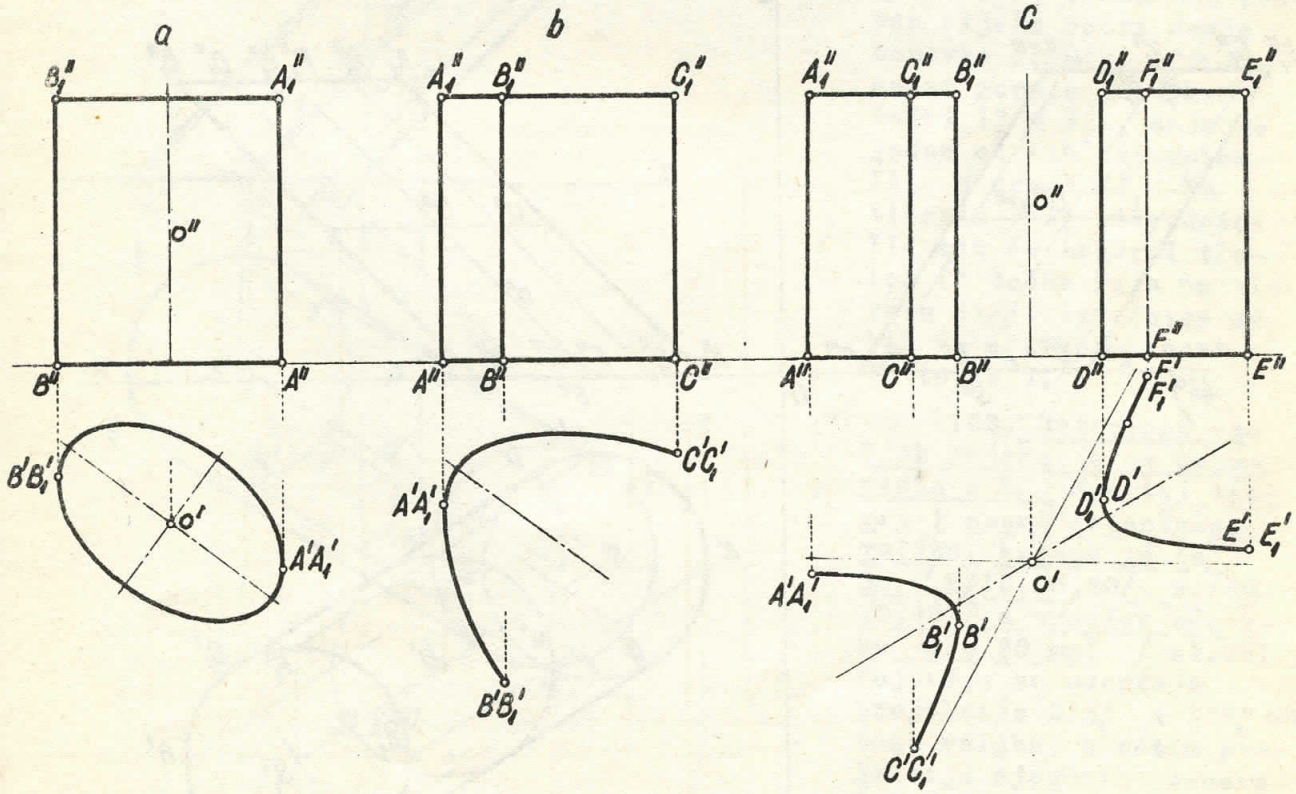
Mreža rotacionog valjka sastoji se od dva sukladna kruga /dvije osnovke/ i pravokutnika, koji je jednak plaštu valjka. Osnovica toga pravokutnika jednaka je opsegu osnovke valjka, a njegova visina jednaka je visini valjka.

St. 101. Eliptična, paraboličnа i hiperboličnа uspravna valjkasta ploha. Na sl. 278.a nacrtane su projekcije jednog dijela uspravne eliptične valjkaste plohe.

Medja njezinog tlocrta je elipsa, a medja njegovog nacrta je pravokutnik $A''A_1''\ B''B_1''$. Izvodnice AA_1 i BB_1 su konturne izvodnice nacrta te uspravne eliptične valjkaste plohe.

Na sl. 278.b nacrtane su projekcije jednog dijela uspravne paraboličnе valjkaste plohe, kojoj su granične izvodnice BB_1 i CC_1, a kojoj je AA_1 konturna izvodnica njezinog nacrta.

Na sl. 278.c nacrtane su projekcije jednog dijela uspravne hiperboličnе valjkaste plohe, kojoj su za njezinu desnu granu granične izvodnice EE_1 i FF_1, a DD_1 je konturna izvodnica njezinog nacrta; dok su za njezinu lijevu granu granične izvodnice AA_1 i CC_1, a BB_1 je konturna izvodnica njezinog nacrta.



Sl. 278 a, b i c

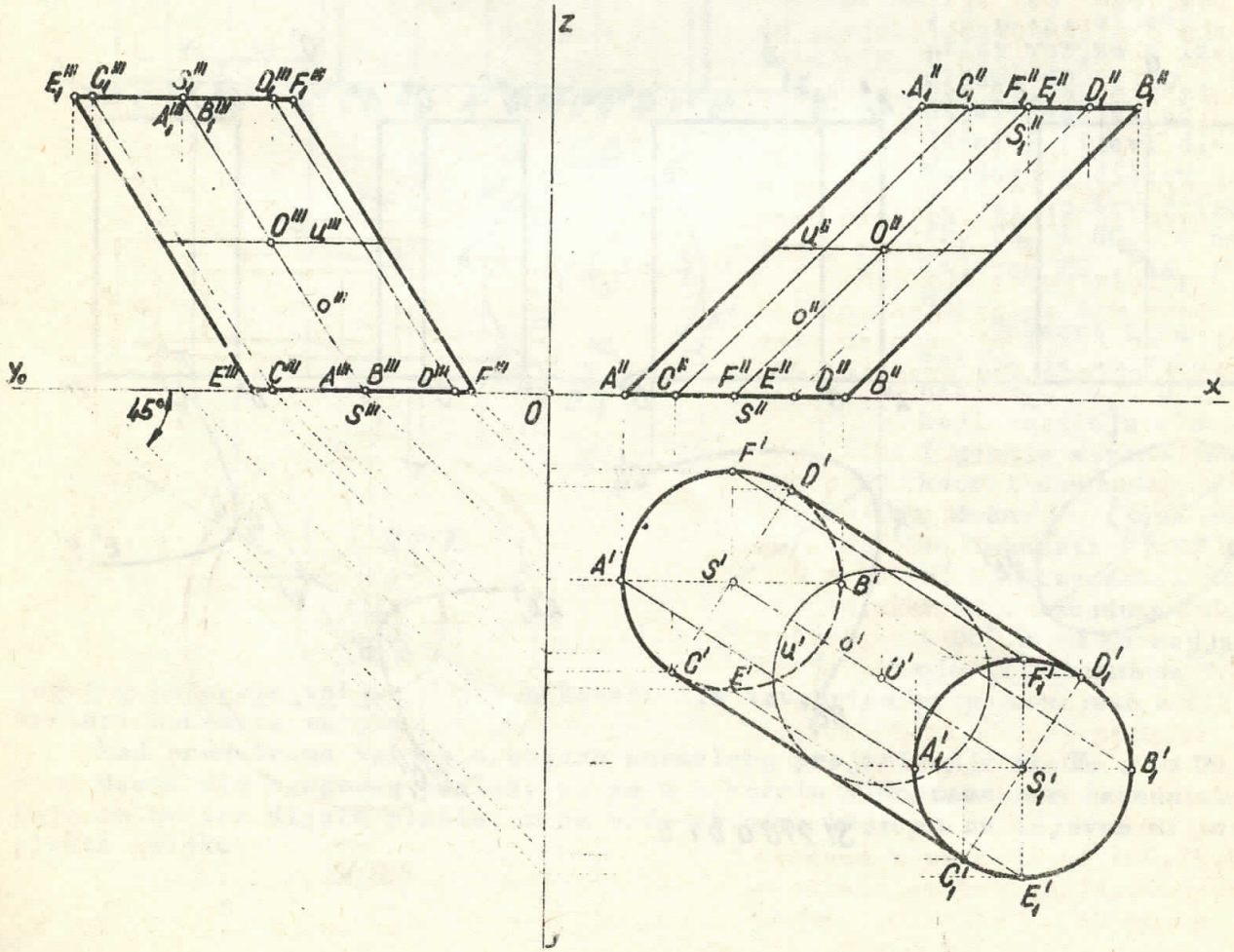
102. Kosi kružni valjak

A. Nacrtaj tri projekcije kosog kružnog valjka, kojemu je os SS_1 [S/25, 25, 0], [S_1/65, 50, 40], a donja osnovka u ravnini Π_1, a promjer osnovke Φ = 30 mm! (sl. 279.).

Najprije se nacrtaju tri projekcije osi toga valjka pomoću zadanih koordinata središta njegovih osnovaka. Tlocrti osnovaka su dva kruga, jedan sa središtem u S', a drugi u S_1', kojima su promjeri Φ = 30 mm. Budući da su sve izvodnice toga valjka jednake i usporedne s osi valjka, bit će i njihove istoimene projekcije jednake i usporedne s projekcijama osi valjka. Izvodnice CC_1 i DD_1, kojih tlocrti $C'C_1'$ i $D'D_1'$ dodiruju tlocrte osnovaka, su konturne izvodnice tlocrta toga valjka. Osni presjek CC_1DD dijeli plašt valjka na gornji i donji dio. Sve izvodnice, koje su na gornjem dijelu plašta, na pr. AA_1, FF_1, bit će u tlocrtu vidljive, a one iz donjeg dijela, na pr. BB_1, EE_1, bit će nevidljive.

Nacrt donje osnovke je dužina A"B", koja je u osi x, a nacrt gornje osnovke je dužina A_1'' B_1'', koja je usporedna s osi x. Nacrti A"A_1'' i B"B_1'' izvodnica AA_1 i BB_1 zatvaraju nacrt valjka, zbog toga su izvodnice AA_1 i BB_1 konturne izvodnice nacrta toga valjka. Osni presjek AA_1B_1B dijeli plašt valjka na prednji i stražnji dio. Sve izvodnice, koje su na prednjem dijelu plašta, na pr. CC_1, EE_1, bit će u nacrtu vidljive, a one iz stražnjeg dijela, na pr. DD_1, bit će nevidljive.

Bokocrt donje osnovke je dužina E''' F''', koja je u osi y_0, a bokocrt gornje osnovke je dužina E_1''' F_1''', koja je usporedna s osi y_0. Bokocrti E''' E_1''' i F''' F_1''' izvodnica EE_1 i FF_1 zatvaraju bokocrt toga valjka, pa su zbog toga izvodnice EE_1 i FF_1 konturne izvodnice bokocrta toga valjka.



Sl 279.

Osni presjek EE_1F_1F dijeli plašt valjka na desni i lijevi dio. Sve izvodnice, koje su na desnom dijelu plašta, na pr. BB_1 i DD_1, bit će u bokocrtu vidljive, a sve iz lijevog dijela, na pr. CC_1, bit će nevidljive.

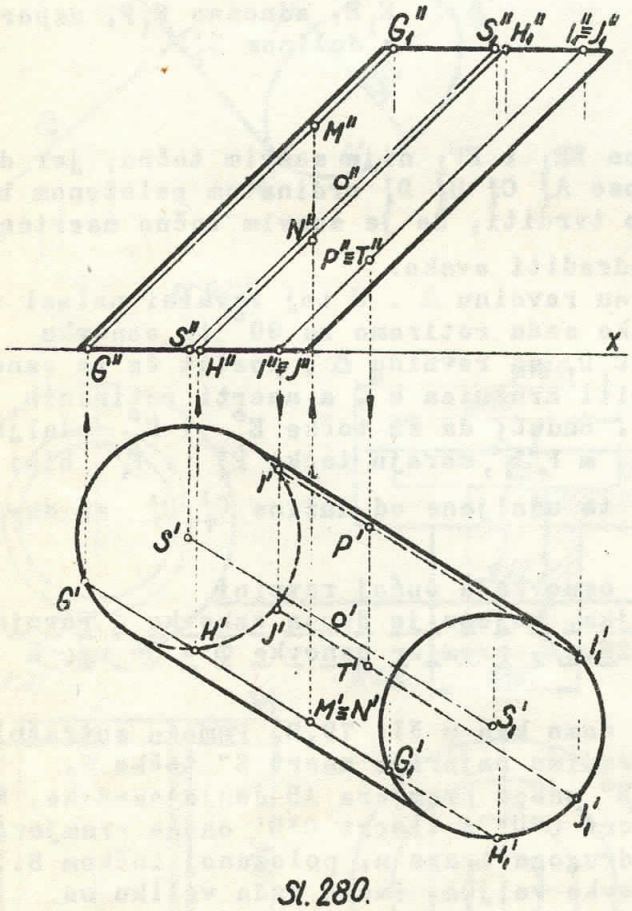
Svaka ravnina, koja je usporedna s osnovkom kosog kružnog valjka, siječe njegov plašt u kružnici, koja je sukladna s osnovkama, ima središte na osi valjka, a zove se usporednik. Na sl. 279. nacrtane su tri projekcije jednog usporednika toga valjka, koji je označen slovom u.

B.- Na slici 280. riješena su ova dva zadatka:

1. Zadani su tlocrti $M' \equiv N'$ točaka M i N, od kojih je jedna na gornjem, a druga na donjem dijelu plašta kosog kružnog valjka; odredi nacrte tih točaka!

Zamislimo svakom tom točkom po jednu izvodnicu valjka. Tlocrti se tih izvodnica djelimično pokrivaju i padaju na pravac, koji ide točkom $M' \equiv N'$ usporedo s $[S'S_1']$. Ako taj pravac siječe tlocrt donje osnovne kružnice u točkama G' i H', a tlocrt gornje osnovne kružnice u točkama G_1' i H_1', onda je tlocrt jedne od tih izvodnica dužina $G'G_1'$, a od druge dužina $H'H_1'$. Konstruiramo li sada nacrte $G''G_1''$ i $H''H_1''$ tih izvodnica, onda će na jednom od njih biti traženi nacrt M'' točke M, a na drugom traženi nacrt N'' točke N.

2. Zadani su nacrti $P'' \equiv T''$ točaka P i T, od kojih je jedna na prednjem, a druga na stražnjem dijelu plašta kosog kružnog valjka; odredi tlocrte tih točaka!

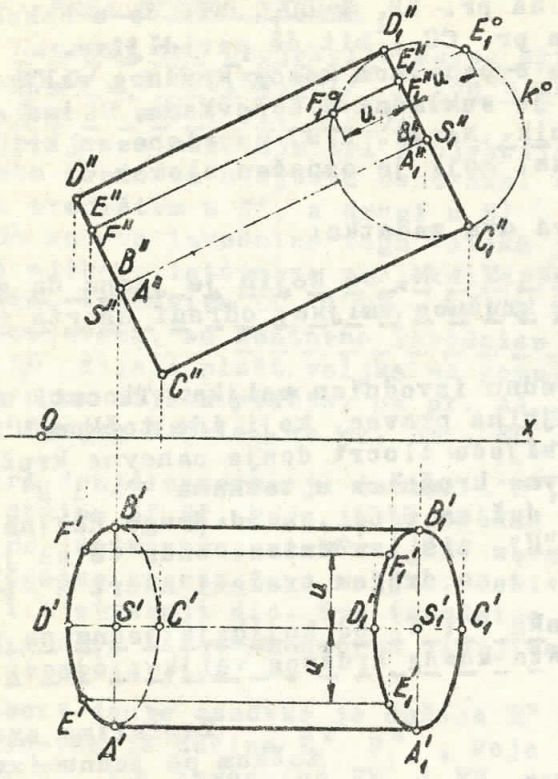


Sl. 280.

Zamislimo svakom tom točkom po jednu izvodnicu valjka. Nacrti se tih izvodnica poklapaju i padaju na pravac, koji ide točkom $P'' \equiv T''$ usporedo s $[S''\ S_1'']$. Ako taj pravac siječe nacrt donje osnovke u točki $I'' \equiv J''$, a nacrt gornje osnovke u točki $I_1'' \equiv J_1''$, onda je jedna od tih izvodnica II_1, a druga JJ_1. Na tlocrtu $I'I_1'$ izvodnice II_1 bit će traženi tlocrt P' točke P, a na tlocrtu $J'J_1'$ izvodnice JJ_1 bit će traženi tlocrt T' točke T.

103. Rotacioni valjak kojemu je os usporedna s Π_2. Nacrtaj tlocrt i nacrt rotacionog valjka, kojemu je os SS_1 [S/10, 25, 20/, S_1/50, 25, 40/], a promjer osnovke $\Phi = 26$ mm! / sl.281./.

Najprije se nacrtaju projekcije $S'S_1'$ i $S''S_1''$ osi toga valjka, a zatim projekcije njegovih osnovaka. Te osnovke su okomite na ravnini Π_2, pa će njihovi nacrti biti dužine $C''D'' = 26$ mm i $C_1''D_1'' = 26$ mm, koje su okomite na nacrtu $S''S_1''$ osi valjka, a tlocrti tih osnovaka bit će elipse $A'C'B'D'$ i $A_1'C_1'B_1'D_1'$, koje se nacrtaju na način prikazan



Sl.281.

u čl. 77.B. Gornja osnovka $A_1C_1B_1D_1$ u tlocrtu je vidljiva, a donja ACBD nevidljiva.

Nacrt toga valjka je pravokutnik $C''C_1''$ $D''D_1''$, a medji njegovog tlocrta pripadaju tlocrti izvodnica AA_1 i BB_1.

Na sl. 281. riješen je još i ovaj zadatak: Zadani su nacrti $E''E_1'' \equiv F''F_1''$ dviju izvodnica, od kojih je jedna na prednjem, a druga na stražnjem dijelu plašta toga valjka, odredi tlocrte tih izvodnica!

Ako točkom $E_1'' \equiv F_1''$ povučemo ordinalu, ona će presjeći elipsu A_1' C_1' B_1' D_1' u točkama E_1' i F_1'.

Točkom E_1', odnosno F_1', ići će traženi tlocrt izvodnice E_1E, odnosno F_1F, usporedo s dužinom $S_1'S'$.

Ta konstrukcija tlocrta izvodnica EE_1 i FF_1 nije sasvim točna, jer do točaka E_1' i F_1' dolazimo siječenjem elipse A_1' C_1' B_1' D_1' ordinalom položenom točkom $E_1'' \equiv F_1''$, a za tu elipsu ne možemo tvrditi, da je sasvim točno nacrtana.

Tlocrti tih izvodnica mogu se točno odrediti ovako:

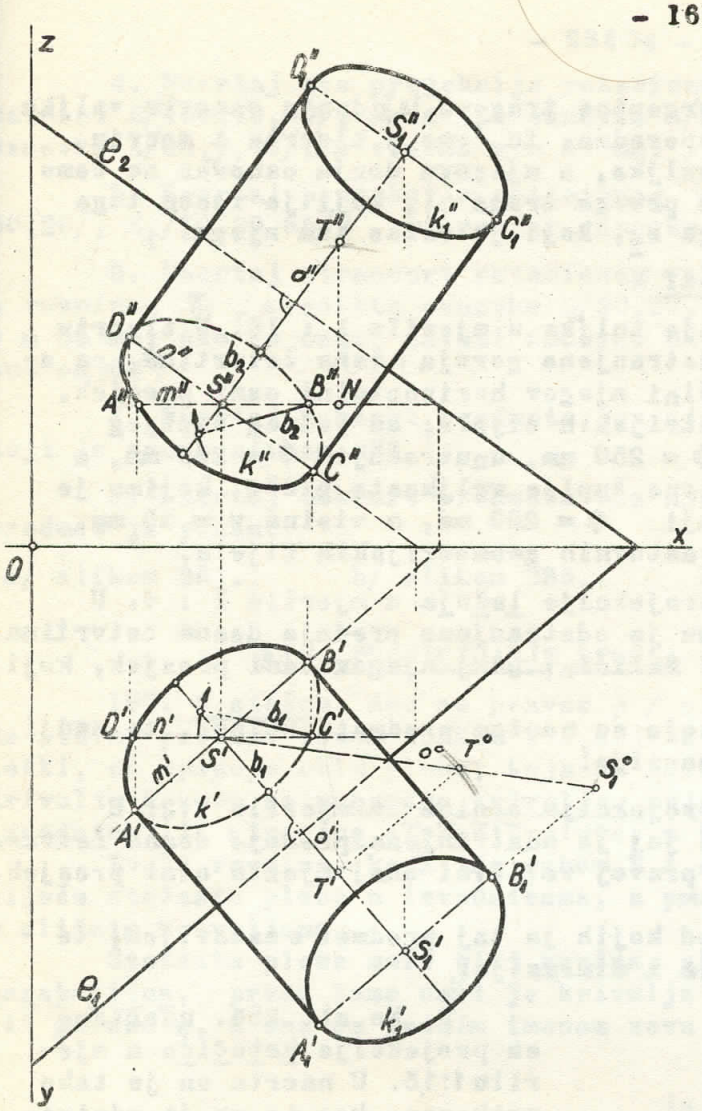
Zamislimo kroz os valjka vertikalnu ravninu Δ. U toj ravnini nalazi se promjer C_1D_1 gornje osnovke valjka. Ako sada rotiramo za 90° tu osnovku skupa s točkama E_1 i F_1 oko promjera C_1D_1 na ravninu Δ, postat će ta osnovka usporedna s Π_2, pa će njezin nacrt biti kružnica k°, a nacrti rotiranih točaka E_1 i F_1 bit će točke E_1° i F_1°. Budući da su točke E_1° i F_1° udaljene od dužine C_1'' D_1'' za duljinu $u = E_1''E_1^\circ = F_1''F_1^\circ$, moraju točke E_1' i F_1' biti na ordinali položenoj točkom $E_1'' \equiv F_1''$, i to udaljene od dužine C_1' D_1' za duljinu u.

104. Rotacioni valjak, kojemu je osnovka u općoj ravnini

Nacrtaj tlocrt i nacrt rotacionog valjka, kojemu je donja osnovka u ravnini E/-80,68,57/, središte osnovke S/ 25,25,z/, promjer osnovke $\Phi = 30$ mm, a visina $v = 50$ mm!

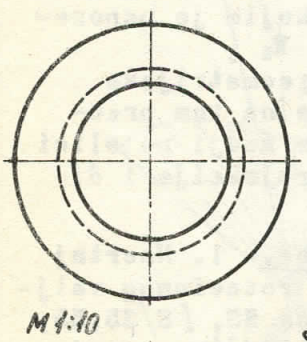
Projekcije donje osnovke nacrtat ćemo kao u čl. 79.B. Pomoću sutražnice prvoga traga m, položene točkom S, odredimo najprije nacrt S'' točke S. Nacrtamo zatim tlocrt A'B' i nacrt A''B'' onoga promjera AB donje osnovke, koji je na toj sutražnici m, a zatim nacrt C''D'' i tlocrt C'D' onoga promjera CD te osnovke, koji je na sutražnici drugoga traga n, položenoj točkom S.

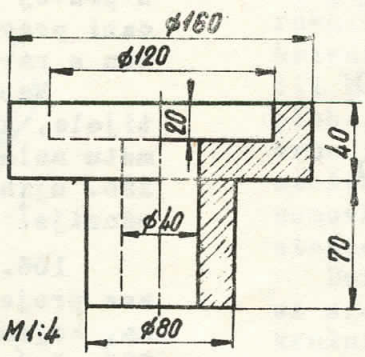
Za elipsu k', koja je tlocrt osnovke valjka, imamo sada veliku os A'B' i dvije točke C' i D', a za elipsu k'', koja je nacrt te osnovke, dužina A''B'' je velika os, a njezine dvije točke su A'' i B''. Veličine b_1 i b_2 malih poluosi tih elipsa odredimo zatim na način prikazan u čl. 76.E, pa na kraju te elipse konstruiramo pomoću kružnica zakrivljenosti njihovih tjemena / čl. 76. F.2/.

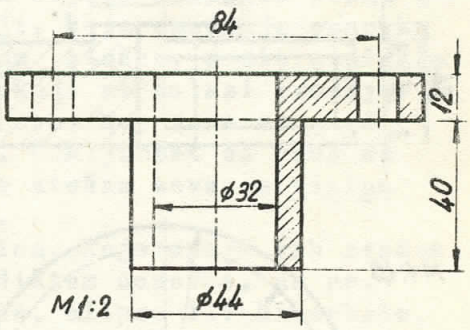


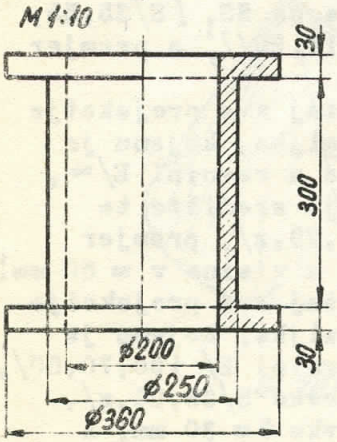
Sl. 282.

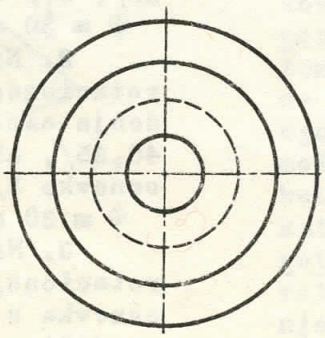
Da bismo nacrtali projekcije gornje osnovke valjka, treba nacrtati projekcije o i o" osi o toga valjka i projekcije S_1' i S_1'' središta S_1 te osnovke, koje je na toj osi. Pravac o' okomit je na tragu e_1, a pravac o" na tragu e_2. Projekcije S_1' i S_1'' središta S_1 gornje osnovke nadjemo na način, koji je istumačen u čl. 21., i to ovako: Na projekcijama osi valjka označimo projekcije T' i T" koje god njezine točke T. Odredimo zatim pravu veličinu $S'T^o$ dužine ST pomoću diferencionog trokuta $S'T'T^o$ / $T'T^o \perp S'T'$, $T'T^o$ = N T"/. Sada na preloženoj osi o^o =[$S'T^o$] nadjemo točku S_1^o tako da bude $S'S_1^o$ = v = 50 mm, pa pomoću točke S_1^o odredimo tlocrt S_1' i nacrt S_1'' središta S_1 gornje osnovke. Projekcije gornje osnovke toga valjka su elipse k_1' i k_1'', koje su sukladne s istoimenim projekcijama donje osnovke. Izvodnice AA_1 i BB_1 su konturne izvodnice tlocrta toga valjka, dok su izvodnice CC_1 i DD_1 konturne izvodnice njegovog nacrta.

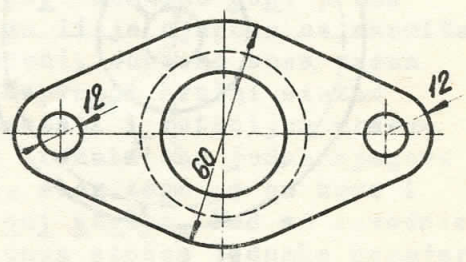












Sl. 283.

Sl. 284.

Sl. 285.

Budući da ravnina E ima konvergentne tragove, te je donja osnovka valjka u toj ravnini, a gornja s njom usporedna, to ćemo u tlocrtu i nacrtu vidjeti istu stranu gornje osnovke valjka, a njegovu donju osnovku ne ćemo vidjeti. Ne ćemo vidjeti ni onaj dio prvoga traga e_1, koji je ispod toga valjka, kao ni onaj dio drugoga traga e_2, koji je ostao iza njega.

105. Složeni valjkasti predmeti

A.- Na sl. 283. nacrtane su projekcije tuljka u mjerilu 1 : 10. U tlocrtu on je tako prikazan, kao da mu je odstranjena gornja desna četvrtina, pa se u toj projekciji vidi u pravoj veličini njegov horizontalni osni presjek. Taj se predmet sastoji od ovih geometrijskih tijela: od jednog šupljeg valjka, kojemu je vanjski promjer $\Phi = 250$ mm, unutrašnji $\Phi = 200$ mm, a visina $v = 300$mm, te od dvije rotacione šuplje valjkaste ploče, kojima je vanjski promjer $\Phi = 360$ mm, unutrašnji $\Phi = 200$ mm, a visina $v = 30$ mm. Potraži na sl. 283. projekcije tih sastavnih geometrijskih tijela!

B.- Na sl. 284. nacrtane su projekcije ležaja u mjerilu 1 : 4. U nacrtu on je tako prikazan, kao da mu je odstranjena prednja desna četvrtina, pa se u toj projekciji vidi u pravoj veličini onaj njegov osni presjek, koji je usporedan s ravninom Π_2 .

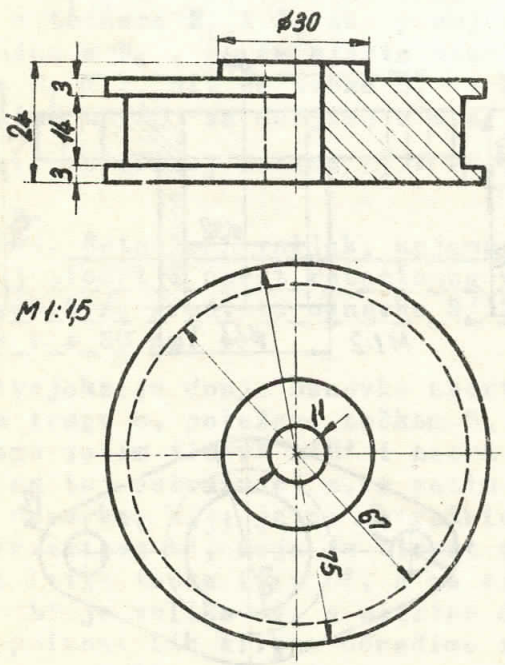
Nabroji geometrijska tijela, koja se na tom predmetu nalaze, te nadji na sl. 284. njihove projekcije i dimenzije!

C.- Na sl. 285. nacrtane su projekcije očnice u mjerilu 1:2. U nacrtu ona je tako prikazana, kao da joj je odstranjena prednja desna četvrtina, pa se u toj projekciji vidi u pravoj veličini onaj njezin osni presjek, koji je usporedan s ravninom Π_2 .

Nabroji geometrijska tijela, od kojih je taj predmet sastavljen, te nadji na sl. 285., njihove projekcije i dimenzije!

D. Na sl. 286. nacrtane su projekcije kotačića u mjerilu 1:1,5. U nacrtu on je tako prikazan, kao da mu je odstranjena prednja desna četvrtina, pa se u toj projekciji vidi u pravoj veličini onaj njegov osni presjek, kojim je usporedan s ravninom Π_2 .

Nabroji geometrijska tijela, koja se na tom predmetu nalaze, te nadji na slici 286. njihove projekcije i dimenzije!



Sl. 286.

106. Vježbe.- 1. Nacrtaj sve projekcije rotacionog valjka, kojemu je os SS_1 [S/25,55, 20/, S_1/ 60,15,20/], a promjer $\Phi = 30$ mm!

2. Nacrtaj sve projekcije rotacionog valjka, kojemu je donja osnovka u ravnini E/∞, 40,35/, ako je središte te osnovke S/35,20,z/, promjer $\Phi = 30$ mm, a visina $v = 50$ mm!

3. Nacrtaj sve projekcije rotacionog valjka, kojemu je osnovka u ravnini E/ 100,70,60/, središte osnovke S/35,25,z/, promjer osnovke $\Phi = 30$ mm, a visina $v = 50$ mm!

4. Nacrtaj sve projekcije rotacionog valjka, kojemu je osnovka u ravnini E/100,70,60/, središte osnovke S/30,y,25/, jedna točka na obodnici osnovke A/25,y,40/, a visina v = 50 mm!

5. Nacrtaj projekcije rotacionog valjka, kojemu je os SS_1 [S/40, 60,20/, S_1/70,30,65/] , a promjer osnovke Φ = 30 mm!

6. Nacrtaj stranocrt rotacionog valjka, kojemu je osnovka usporedna s ravninom π_4 , središte osnovke S/30,30,10/, promjer Φ = 35, a visina v = 55 mm, ako se os x_2x_3 nalazi nadesno od nacrta valjka i čini s osi x kut od 60°!

7. Nacrtaj bokocrt predmeta bez njegove gornje desne četvrtine, koji je zadan slikom 283.!

8. Nacrtaj bokocrt predmeta bez njegove prednje desne četvrtine, a predmet je zadan:

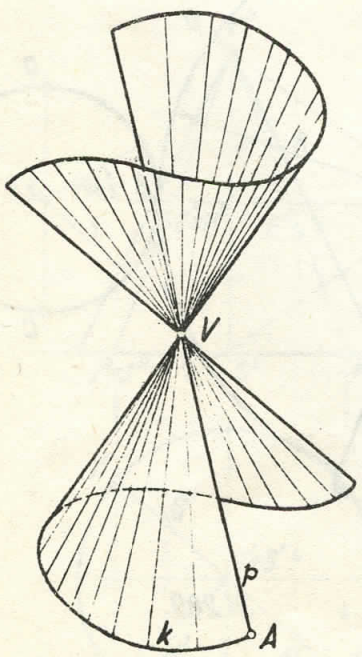
a/ slikom 284., b/ slikom 285., c/ slikom 286!

§14. PROJICIRANJE STOŠCA

107. O stošcu. Ako se pravac p / sl. 287./ giblje u prostoru tako, da stalno prolazi istom točkom V i siječe zadanu krivulju k samo u jednoj točki, on opisuje oblu plohu, koja se zove stožasta ili konična ploha. Krivulja k zove se provodna krivulja, pojedini položaji pravca p zovu se izvodnice ili stranice stožaste plohe, a točka V vrh stožaste plohe.

Svaka ravnina, koja ide vrhom V i presijeca provodnu krivulju, siječe stožastu plohu u izvodnicama, a paralelne ravnine sijeku tu plohu u sličnim krivuljama.

Stožasta ploha može biti kružna, eliptična, hiperbolična ili paraboličnа, prema tome da li je krivulja k kružnica, elipsa, hiperbola, ili parabola, a one se jednim imenom zovu stožaste plohe drugoga reda.



Sl. 287.

Dio stožastog prostora, koji je s jedne strane omeđen vrhom V, a s druge strane nekom ravninom, koja ne prolazi tim vrhom, zove se stožac, čunj ili konus. Ta ravnina siječe stožastu plohu u krivulji, koja omeđuje osnovku ili bazu stošca, a dio stožaste plohe, koji se nalazi između vrha i osnovke, zove se plašt stošca. Udaljenost od vrha do osnovke stošca zove se visina stošca.

Dužina, koja spaja vrh stošca sa središtem osnovke, na pr. kružnice, elipse ili hiperbole, zove se os stošca. Stožac je uspravan, odnosno kos, prema tome, da li je njegova os okomita na osnovci, odnosno kosa prema njoj. Uspravni kružni stožac može nastati i rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete, zbog toga se on zove i rotacioni stožac. Kad su izvodnice rotacionog stošca jednake promjeru njegove osnovke, stožac je istostraničan. Svaka ravnina, koja

je usporedna s osnovkom kružnog stošca uspravnog ili kosog, a nalazi se izmedju osnovke i vrha, siječe plašt stošca u kružnici, koja se zove usporednik stošca.

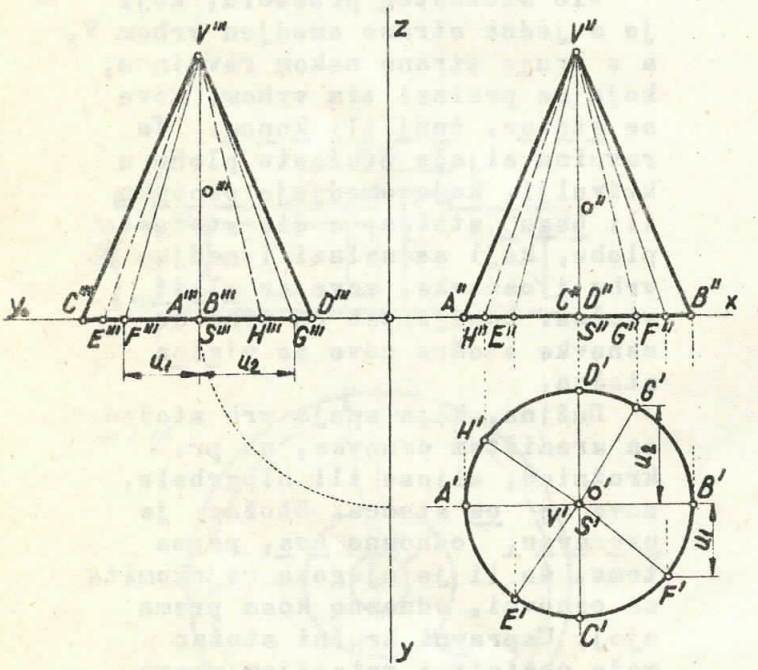
Presjek stošca ravninom, koja je položena njegovom osju, zove se osni presjek stošca. Osni presjeci rotacionog stošca su sukladni istokračni trokuti, a osni presjeci kosog kružnog stošca su raznostranični trokuti. Onaj osni presjek kosog kružnog stošca, koji je okomit na ravnini osnovke, zove se karakteristični trokut kosog kružnog stošca. U ravnini karakterističnog trokuta kosog kružnog stošca nalaze se os i visina stošca. Stranice karakterističnog trokuta kosog kružnog stošca su promjer njegove osnovke, te najduža i najkraća njegova izvodnica.

Medju svim osnim presjecima kosog kružnog stošca jedan je istokračni trokut. Ravnina toga trokuta mora biti okomita na ravnini karakterističnog trokuta, jer ona treba da siječe osnovku u onom promjeru, koji je okomit na normalnoj projekciji osi stošca na ravnini osnovke.

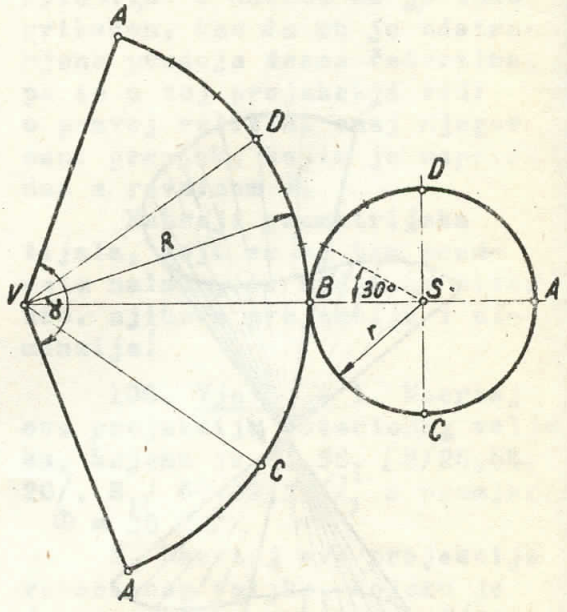
108. Rotacioni stožac i njegova mreža

A.- Projekcije i mreža rotacionog stošca. Na sl. 288. nacrtane su tri projekcije rotacionog stošca, kojemu je promjer osnovke $\Phi = 30$ mm, središte osnovke S/25, 25,0/, a os o okomita na ravnini Π_1.

Tlocrt osnovke toga stošca je krug, kojemu je promjer $\Phi = 30$ mm, a središte S'. U taj krug pada i tlocrt plašta stošca, a u središta toga kruga nalazi se tlocrt V' vrha V, kao i tlocrt o' osi o toga stošca. Polumjeri toga kruga su tlocrti izvodnica. Sve izvodnice stošca vide se u tlocrtu.



Sl.288.



Sl.289.

Medja nacrta toga stošca je istokračan trokut A"B"V". Taj je trokut nacrt onog osnog presjeka stošca, koji je usporedan s ravninom Π_2 i dijeli taj stožac na dva jednaka dijela: prednji i stražnji. Izvodnice EV, CV i FV su na prednjem dijelu toga stošca, pa se zbog toga te izvodnice u nacrtu vide, dok se izvodnica HV, DV i GV u nacrtu ne vide, jer se one nalaze na stražnjem dijelu toga stošca. Izvodnice AV i BV su medjašnje ili konturne izvodnice nacrta stošca.

Medja bokocrta toga stošca je istokračan trokut C‴ D‴ V‴ . Taj je trokut bokocrt onog osnog presjeka stošca, koji je usporedan s ravninom Π_3 i dijeli taj stožac na desni i lijevi dio. Izvodnice BV, FV i GV su na desnom dijelu toga stošca, pa se zbog toga te izvodnice u bokocrtu vide, dok se ne vide izvodnice AV, EV i HV, koje se nalaze na lijevom dijelu toga tijela. Izvodnice CV i DV su medjašnje ili konturne izvodnice bokocrta stošca.

Mreža rotacionog stošca sastoji se od kruga / osnovke/ i mreže plašta, koja je kružni isječak, kojemu je polumjer jednak izvodnici stošca, a duljina luka jednaka opsegu osnovke stošca. Mreža rotacionog stošca je sl. 288. nacrtana jena slici 289. ovako: Uz kružnicu, kojoj je polumjer r = 15 mm, nacrtana je veća kružnica, koja tu kružnicu dodiruje, a ima za polumjer R pravu veličinu izvodnice stošca, dakle R = A"V". Zatim se manja kružnica razdijeli na 12 jednakih dijelova, pa se luk te kružnice, kojemu pripada središnji kut od 30^0, prenese na veću kružnicu na način prikazan na sl. 221., a zatim se taj luk nanese po većoj kružnici još 11 puta. Luk ACBDA, koji se na taj način konstruira i jednak je opsegu osnovke, omedjuje s polumjerima AV kružni isječak VACBDA, koji je mreža plašta stošca.

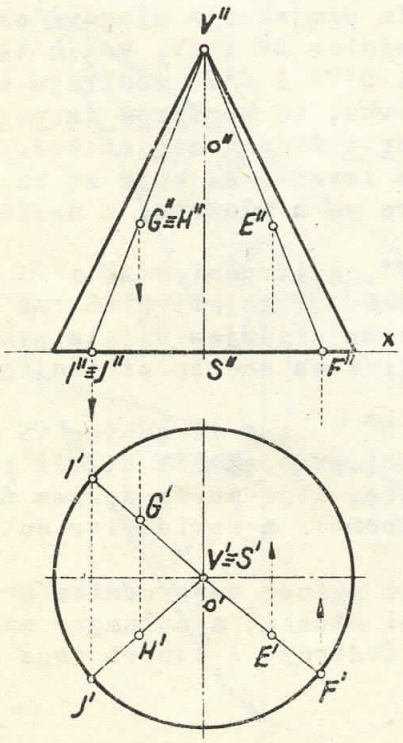
Za kontrolu te konstrukcije može poslužiti kut α toga kružnog isječka, koji možemo izračunati ovako:

Ako u razmjer $l : 2R\Pi = \alpha : 360^0$ stavimo da je $l = 2r\Pi$, dobit ćemo da je

$$\alpha = \frac{360^0 r}{R} .$$

B.- Odredjivanje projekcija točaka stošca pomoću izvodnica

Na sl. 290. riješena su ova dva zadatka:



Sl. 290.

1. Zadan je tlocrt E' točke E, koja je na plaštu rotacionog stošca; neka se konstruira nacrt te točke!

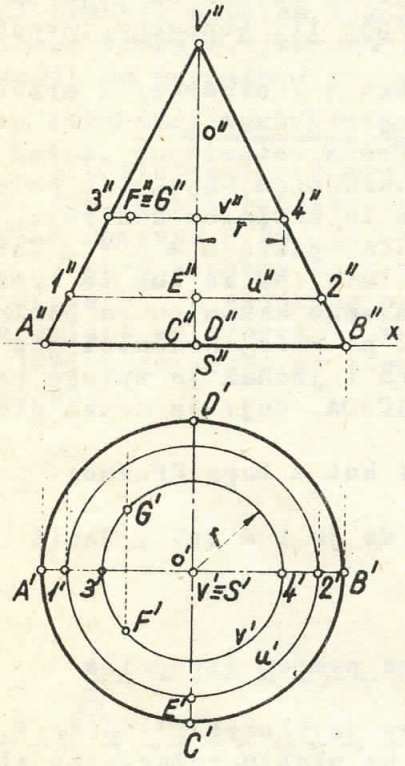
Točkom E zamislimo izvodnicu stošca FV. Tlocrt te izvodnice bit će polumjer F'V', koji ide točkom E'. Na nacrtu F"V" te izvodnice bit će traženi nacrt točke E.

2. Zadani su nacrti G" ≡ H" točaka G i H, od kojih je jedna na prednjem dijelu, a druga na stražnjem dijelu plašta rotacionog stošca, odredi tlocrte tih točaka.

Svakom tom točkom ide po jedna izvodnica stošca. Nacrti se tih izvodnica poklapaju i padaju na pravac, koji je odredjen točkom G" ≡ H" i točkom V". Ako taj pravac siječe nacrt osnovke u točki I" ≡ J", onda je jedna od tih izvodnica IV, a druga JV. Na tlocrtu I'V' izvodnice IV bit će traženi tlocrt G' točke G, a na tlocrtu J'V' izvodnice JV bit će traženi tlocrt H' točke H.

C.- Odredjivanje projekcija točaka stošca pomoću usporednika.

Kad se tlocrt E' točke E (sl. 291), koja je na plaštu stošca, nalazi ispod V', t.j. na polumjeru C'V', ne može se odrediti nacrt E" točke E pomoću izvodnice CV, jer se ordinala, koja se položi točkom E', poklapa a ne siječe s nacrtom C"V" te izvodnice. U tome slučaju konstruira se nacrt E" točke E ovako: Zamisli se točkom E jedan usporednik u stošca. Njegov tlocrt bit će kružnica u', kojoj je središte V', a prolazi točkom E'. Taj usporednik u siječe izvodnicu AV u točki 1, a izvodnicu BV u točki 2, kojima su tlocrti točke 1' i 2', a nacrti 1" i 2". Na dužini 1"2", koja je nacrt u" usporednika u, bit će traženi nacrt E" točke E.



Sl. 291.

Na istoj slici odredjeni su pomoću usporednika v tlocrti F' i G' točaka F i G plašta rotacionog stošca, kojima se nacrti poklapaju F" ≡ G". Nacrt v" usporednika v, koji prolazi tim točkama, je dužina 3"4", koja ide točkom F" ≡ G" usporedo s osi x. Pomoću polumjera r toga usporednika, nacrtan je njegov tlocrt v', a na njemu su traženi tlocrti F' i G' točaka F i G.

109. Kosi kružni stožac i njegova mreža

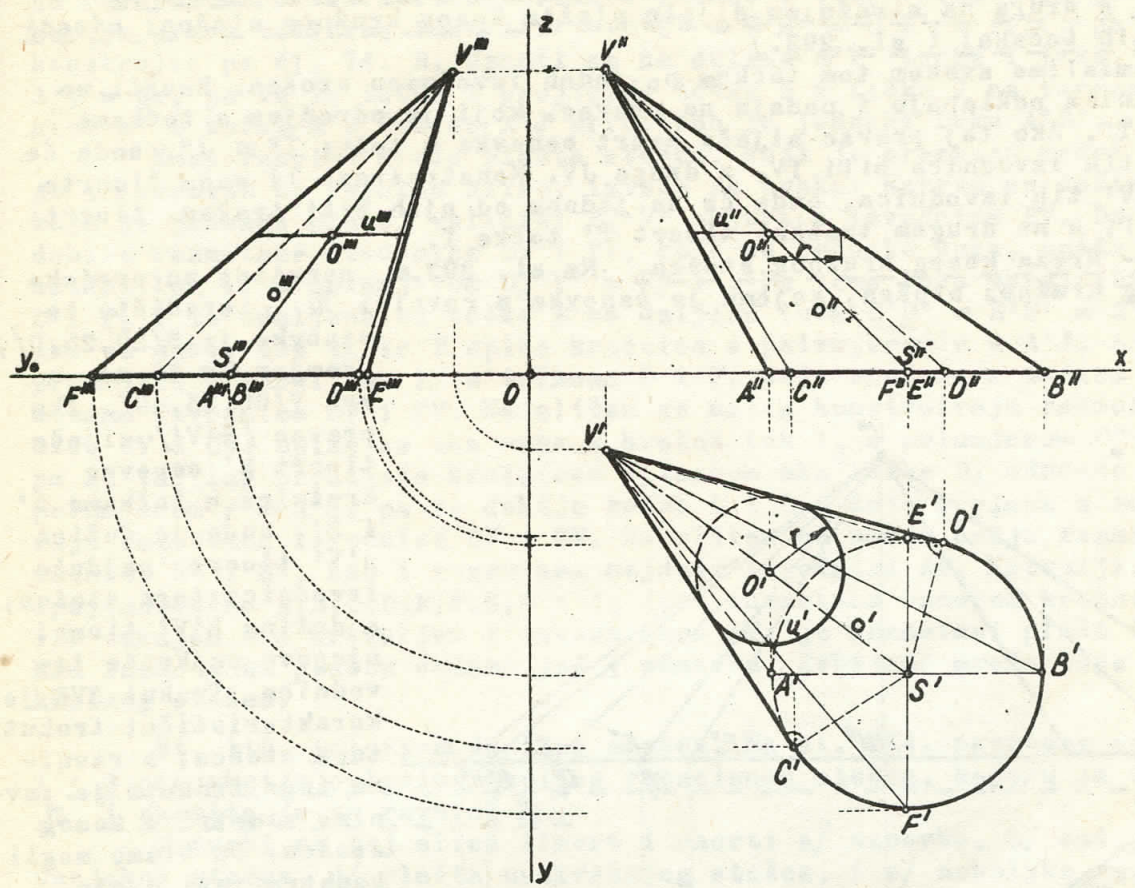
A.- Nacrtaj tri projekcije kosog kružnog stošca, kojemu je os SV [S/50,40,0/, V/10,10,40/], osnovka u ravnini Π_1, a promjer osnovke Φ = 36 mm! (sl. 292.)

Pomoću zadanih koordinata središta S osnovke i vrha V najprije se nacrtaju projekcije osi o toga kosog stošca, a zatim projekcije njegove osnovke. Izvodnice DV i CV, kojih tlocrti D'V' i C'V' dodiruju tlocrt osnovke, su konturne izvodnice tlocrta toga kosog stošca. One dijele njegov plašt na gornji i donji dio. Sve izvodnice, koje su na gornjem dijelu plašta, na pr. BV i FV, vidljive su u tlocrtu, a nevidljive su one iz donjeg dijela na pr. AV.

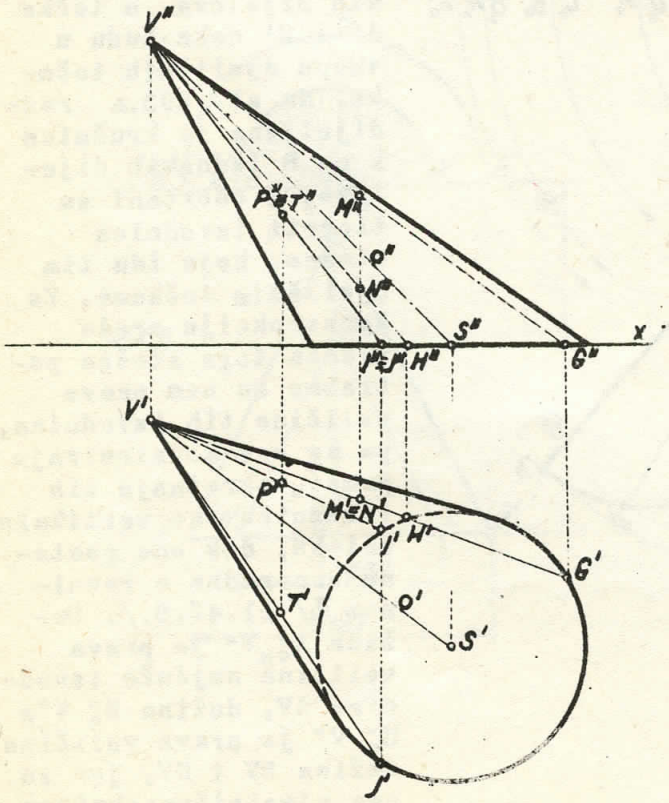
Nacrt toga kosog stošca je trokut A"B"V", a izvodnice AV i BV su konturne izvodnice njegovog nacrta. Osni presjek ABV dijeli plašt na prednji i stražnji dio. Sve izvodnice, koje su na prednjem dijelu plašta, na pr. CV i FV vidljive su u nacrtu, a nevidljive su one iz stražnjeg dijela, na pr. EV i DV.

Bokocrt toga kosog stošca je trokut F''' E''' V''' , a izvodnice FV i EV su konturne izvodnice njegovog bokocrta. Osni presjek FEV dijeli plašt toga stošca na desni i lijevi dio. Sve izvodnice, koje su na desnom dijelu plašta, na pr. BV i EV, vidljive su u bokocrtu, a nevidljive su one iz lijevog dijela, na pr. CV i AV.

Na sl. 292. nacrtane su još i projekcije jednog usporednika u toga kosog stošca. Njegovo središte O je na osi stošca, a polumjer mu je r. Tlocrti konturnih izvodnica toga stošca dodiruju i tlocrt toga usporednika.



Sl.292.



Sl.293.

B.- Na sl. 293.riješena su ova dva zadatka:

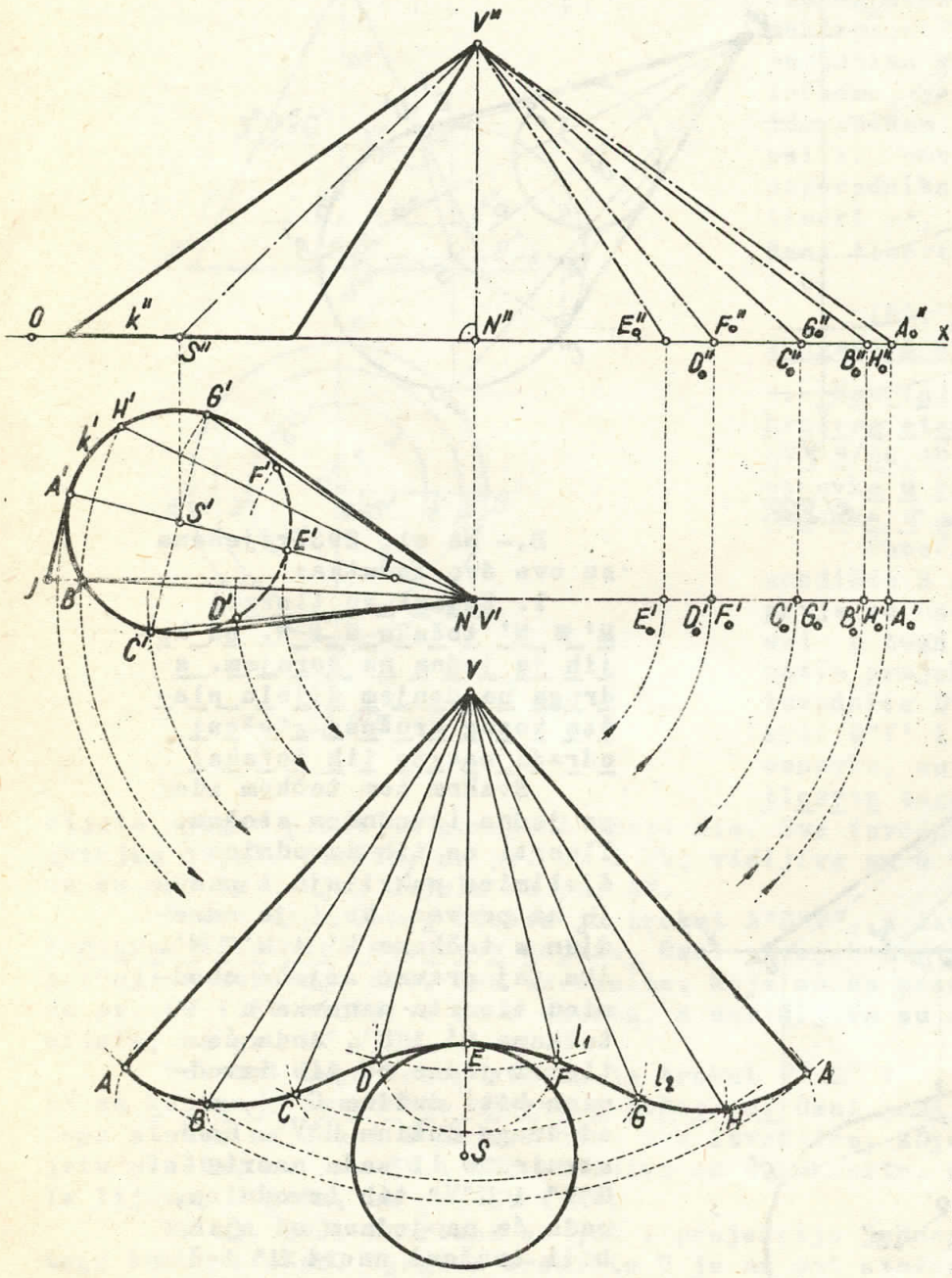
1. Zadani su tlocrti M' ≡ N' točaka M i N, od kojih je jedna na gornjem, a druga na donjem dijelu plašta kosog kružnog stošca; odredi nacrte tih točaka!

Svakom tom točkom ide po jedna izvodnica stošca. Tlocrti se tih izvodnica djelimice pokrivaju i padaju na pravac, koji je odredjen s točkama V' i M' ≡ N'. Ako taj pravac siječe obodnicu tlocrta osnovke u točkama G' i H', onda će tlocrt jedne od tih izvodnica biti dužina G'V', a od druge dužina H'V'. Konstruiramo li sada nacrte G"V" i H"V" tih izvodnica, onda će na jednom od njih biti traženi nacrt M" točke M, a na drugom traženi nacrt N" točke N.

2. Zadani su nacrti $P'' \equiv T''$ točaka P i T_1 od kojih je jedna na prednjem, a druga na stražnjem dijelu plašta kosog kružnog stošca; odredi tlocrte tih točaka! [sl. 293.]

Zamislimo svakom tom točkom po jednu izvodnicu stošca. Nacrti se tih izvodnica poklapaju i padaju na pravac, koji je odredjen s točkama V" i $P'' \equiv T''$. Ako taj pravac siječe nacrt osnovke u točki $I'' \equiv J''$, onda će jedna od tih izvodnica biti IV, a druga JV. Konstruiramo li sada tlocrte I'V' i J'V' tih izvodnica, onda će na jednom od njih biti traženi tlocrt P' točke P, a na drugom traženi tlocrt T' točke T.

C.- Mreža kosog kružnog stošca. Na sl. 293.a nacrtane su projekcije kosog kružnog stošca, kojemu je osnovka u ravnini Π_1, središte te osnovke je S/20,25,0/, promjer Φ= 30 mm, a vrh V/60,35,40/. Ako pravac [S'V'] siječe tlocrt k' osnovne kružnice u točkama A' i E', onda je dužina A'V' tlocrt najduže izvodnice toga stošca, a dužina E'V' tlocrt njegove najkraće izvodnice. Trokut AVE je karakteristični trokut toga stošca, a ravnina toga trokuta je ravnina simetrije kosog stošca. Da bismo mogli konstruirati mrežu plašta toga stošca, razdijelimo tlocrt k' osnovne kružnice na što veći broj jednakih dijelova, a točke A' i E' neka budu u skupu djelišnih točaka. Na sl. 293.a razdijeljena je kružnica k na 8 jednakih dijelova, i nacrtani su tlocrti izvodnica stošca, koje idu tim djelišnim točkama. Za konstrukciju mreže plašta toga stošca potrebne su nam prave veličine tih izvodnica, pa se one konstruiraju pomoću okretanja tih izvodnica oko vertikalne osi VN, dok one postanu usporedne s ravninom Π_2/ čl.47.B./. Dužina $A''_0 V''$ je prava veličina najduže izvodnice AV, dužina $B''_0 V'' \equiv H''_0 V''$ je prava veličina dužina BV i HV, jer su one simetrične obzirom



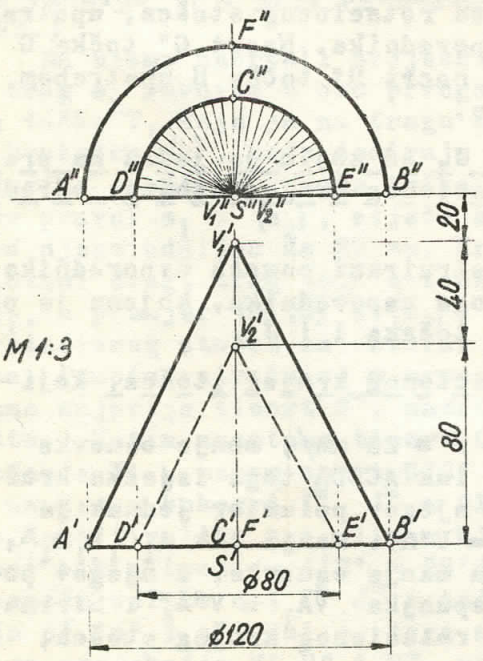
Sl. 293.a

na ravninu karakterističnog trokuta stošca i t.d. Pored toga potrebna nam je prava veličina luka $A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = \ldots$, pa se ona konstruira po čl. 74. B. Označi se na dužini A'V' točka I tako, da bude $A'I = 3r$, pa se iz točke I projicira točka B u točku J na tangentu kružnice k' u točki A'. Dužina A'J približno je jednaka luku A'B'.

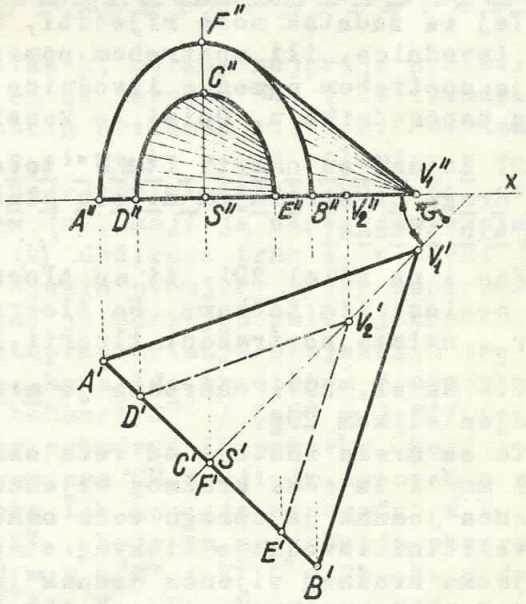
Konstrukcija mreže plašta stošca, koji je prerezan uzduž izvodnice AV i razmotan na ravninu slike, izvede se ovako: Nacrta se dužina VE, koja je jednaka pravoj veličini $E_o'' V''$ najkraće izvodnice EV. Da bi se dobile razmotane izvodnice DV i FV, koje su jednako duge, opiše se oko V kružni luk l_1 s polumjerom $D_o'' V'' = F_o'' V''$. Na tome luku moraju biti točke D i F, i to udaljene od točke E za duljinu luka $\underline{E'D'} = \underline{E'F'} = \underline{A'B'} = \underline{A'J}$. Ako se dakle oko točke E opiše kružnica s polumjerom $r = A'J$, ona će presjeći opisani luk l_1 u točkama D i F, koje spojene s točkom V daju razmotane izvodnice DV i FV. Na sličan se način konstruiraju razmotane izvodnice CV i GV. Opiše se oko vrha V kružni luk l_2 s polumjerom $C_o'' V'' = G_o'' V''$, pa se taj luk presiječe kružnicom opisanom oko točke D, odnosno F, a s polumjerom $r = A'J$, pa se dobiju točke C i G, koje spojene s točkom V daju razmotane izvodnice CV i GV. Na sličan se način nadju razmotane izvodnice BV i HV, kao i razmotana najduža izvodnica AV. Krivulja, kojom spojimo točke A,B,C,D,E,F,G,H i A, jest razmotana osnovna kružnica k, a lik omeđen tom krivuljom i izvodnicama AV, je razmotani plašt toga stošca. Kad razmotanom plaštu dodamo još i osnovku, dobijemo mrežu toga kosog kružnog stošca.

St. 110. Polovina šupljeg stošca. Na sl. 294. nacrtane su u mjerilu 1 : 3 projekcije polovine šupljeg rotacionog stošca, kojemu je os u ravnini Π_1 i okomita je na ravnini Π_2.

Potraži na toj slici tlocrt i nacrt: a/ osnovke, b/ osi, c/ plašta vanjskog stošca, d/ plašta unutrašnjeg stošca, i e/ nekoliko izvodnica unutrašnjeg stošca. Koje su dimenzije toga predmeta?



Sl. 294.



Sl. 295.

Na sl. 295. nacrtane su u istom mjerilu projekcije toga predmeta, samo os predmeta čini sada s Π_2 kut od 45^0.

Tlocrt toga predmeta sukladan je s tlocrtom iz sl. 294., samo sada njegova os simetrije $S'V_1'$ čini s osi x kut od 45^0. Pomoću tlocrta konstruira se zatim nacrt toga predmeta. Nacrt osnovke omedjen je dvjema polovinama elipsa. Polovine velikih osi tih elipsa su S"F" = 60 mm i S"C" = 40 mm, a polovine malih osi su S"A" i S"D", koje se dobiju kao nacrti onih polumjera SA i SD, koji su u ravnini Π_1.

Onaj dio plašta vanjskog stošca, koji se u nacrtu vidi, omedjen je u nacrtu s donje strane osju x, a s gornje tangentom, koja se iz točke V_1'' povuče na elipsu A"F"B".

Potraži na toj slici tlocrt i nacrt: a/ osnovke, b/ osi, c/ plašta vanjskog stošca, d/ plašta unutrašnjeg stošca, i e/ nekoliko izvodnica unutrašnjeg i vanjskog stošca!

St. 111. Krnji rotacioni stožac i njegova mreža

A.- Na sl. 296. nacrtani su tlocrt i nacrt krnjeg rotacionog stošca, kojemu je polumjer veće osnovke r = 23 mm, manje r = 12 mm, visina v = 22 mm, a veća se osnovka nalazi u ravnini Π_1 .-

Na ravnini Π_1 projiciraju se osnovke krnjeg stošca kao koncentrični krugovi u pravoj veličini, a u kružni vijenac, što ga omedjuju tlocrti osnovnih kružnica, projicira se plašt krnjeg stošca. Njegove izvodnice projiciraju se kao odresci polumjera, koji su u tom kružnom vijencu.

Nacrt toga rotacionog krnjeg stošca je istokračan trapez $A''B''B_1''A_1''$. Osnovice A"B" i $A_1''B_1''$ toga trapeza su nacrti njegovih osnovaka, a kraci $A''A_1''$ i $B''B_1''$ su nacrti onih njegovih izvodnica AA_1 i BB_1, koje su usporedne s ravninom Π_2. Ravnina tih izvodnica dijeli krnji stožac na prednji i stražnji dio. Izvodnice iz prednjeg dijela vide se u nacrtu, na pr. $E E_1$, a one iz stražnjeg dijela ne vide se, na pr. FF_1.

B.- Na istoj slici riješena su još i ova dva zadatka:

1. Zadani su tlocrti G' i H' dviju točaka G i H, koje su na prednjoj polovini plašta rotacionog stošca; neka se konstruiraju nacrti tih točaka!

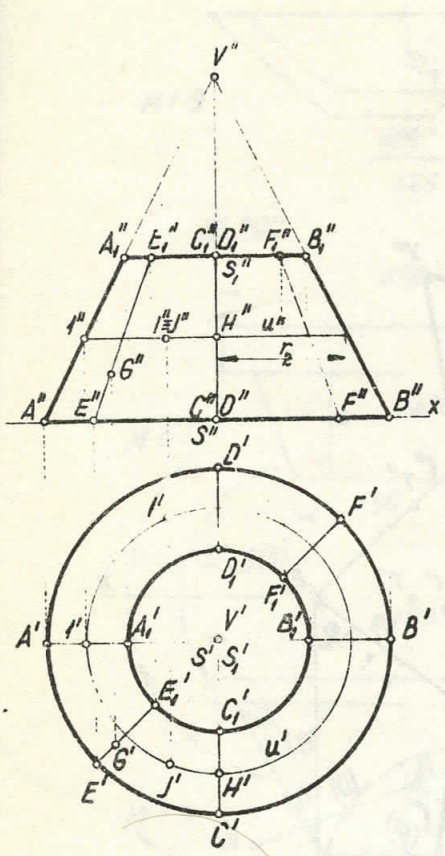
Taj se zadatak može riješiti, kao i kod rotacionog stošca, upotrebom pomoćne izvodnice, ili upotrebom pomoćnog usporednika. Nacrt G" točke G nadjen je upotrebom pomoćne izvodnice EE_1, a nacrt H" točke H upotrebom pomoćnog usporednika u. Opiši te konstrukcije!

2. Zadani su nacrti I" ≡ J" točaka I i J, od kojih je jedna na prednjem, a druga na stražnjem dijelu plašta rotacionog krnjeg stošca; odredi tlocrte tih točaka!

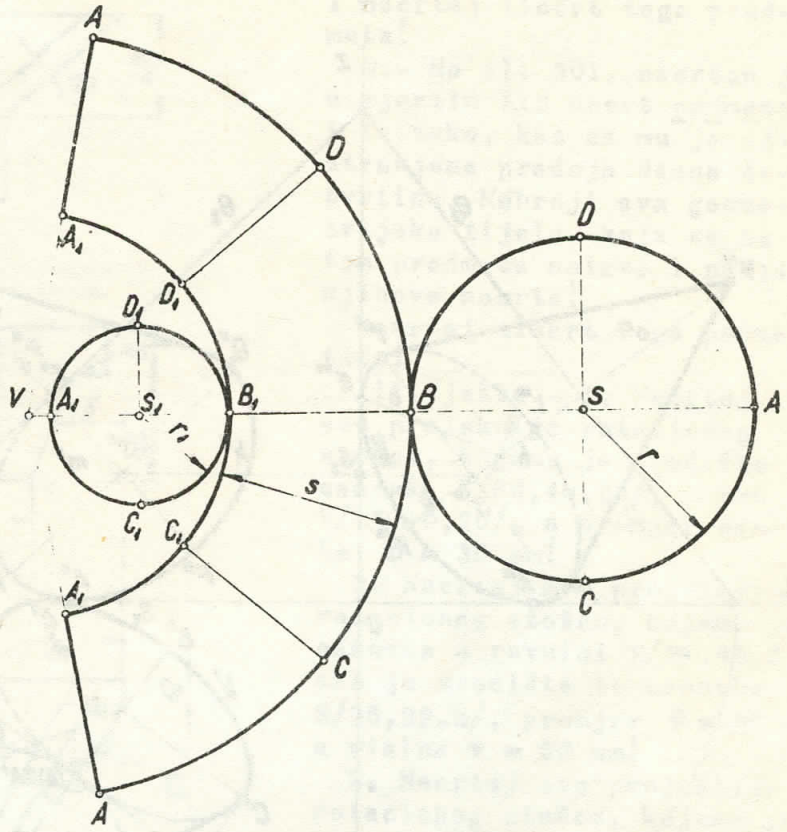
Kao i na slici 291. ti su tlocrti konstruirani pomoću usporednika u, koji prolazi tim točkama. Na tlocrtu u' toga usporednika, kojemu je polumjer r_2, nalaze se traženi tlocrti I' i J' točaka I i J.

C.- Na sl. 297. nacrtana je mreža rotacionog krnjeg stošca, koji je odredjen slikom 296.

Ta se mreža sastoji od veće osnovke / r = 23 mm/, manje osnovke / r_1 = 12 mm/ i isječka kružnog vijenca. Veći luk ACBDA toga isječka kružnog vijenca jednak je opsegu veće osnovke, a njegov polumjer jednak je pravoj veličini izvodnice čitavog stošca VA = V"A". Manji luk $A_1C_1B_1D_1A_1$ toga isječka kružnog vijenca jednak je opsegu manje osnovke, a njegov polumjer jednak je pravoj veličini izvodnice dopunjka VA_1 = $V''A_1''$. Širina vijenca jednaka je pravoj veličini izvodnice rotacionog krnjeg stošca, s = $A''A_1''$.



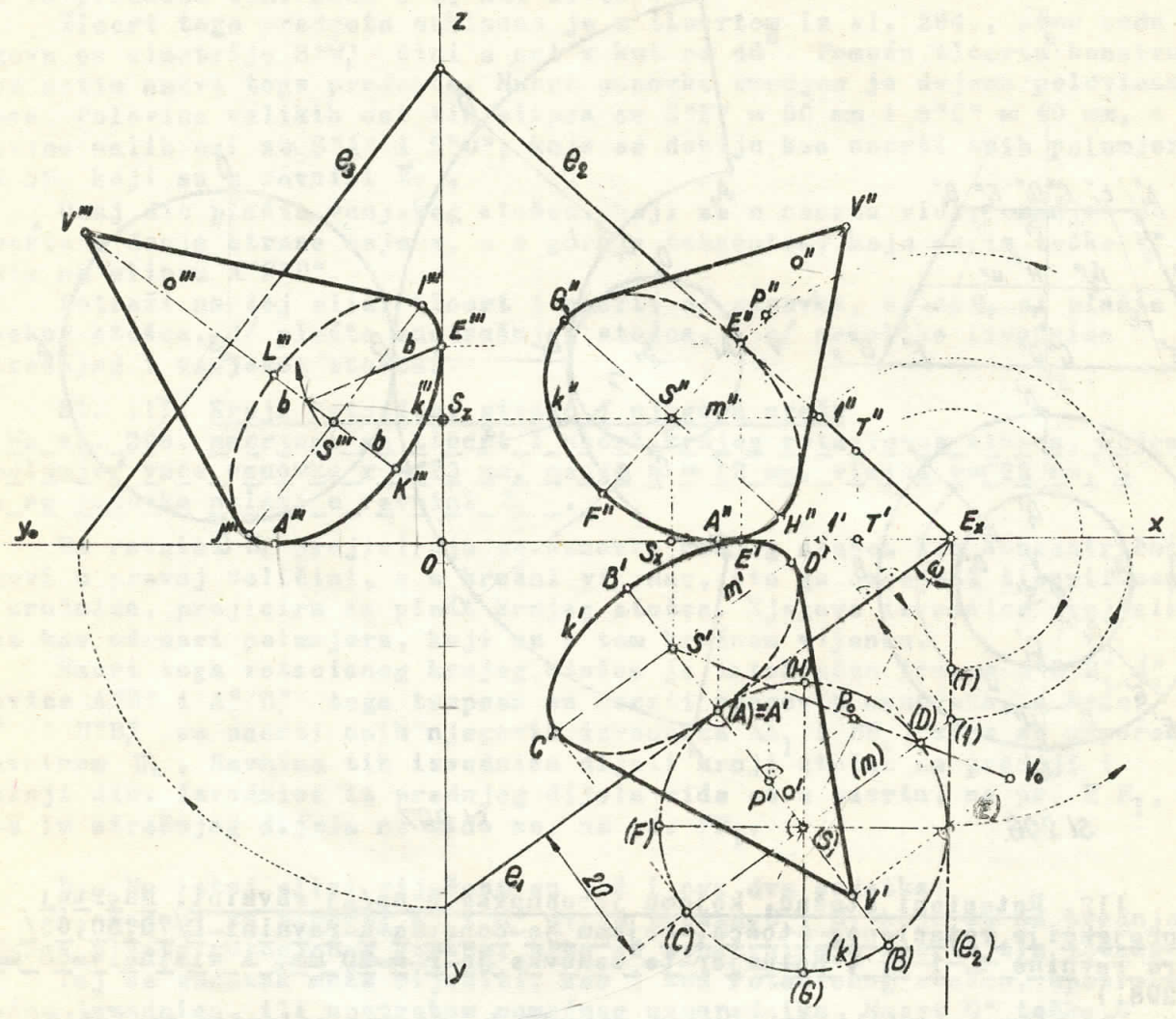
Sl. 296.



Sl. 297

112. Rotacioni stožac, kojemu je osnovka u općoj ravnini. Nacrtaj sve projekcije rotacionog stošca, kojemu je osnovka u ravnini E/70,50,65/ i dira ravnine Π_1 i Π_2, polumjer te osnovke je r = 20 mm, a visina v=50 mm! (Sl.298.)

Da bismo nacrtali projekcije osnovke k, moramo najprije preložiti drugi trag e_2 ravnine E oko prvoga traga e_1 na ravninu Π_1. To izvedemo pomoću točke T, koja je na tragu e_2, na način prikazan sl. 142. Nacrtamo zatim kružnicu (k), koja dodiruje pravce e_1 i (e_2), a ima polumjer r = 20 mm. Njezino središte je ona točka (S), u kojoj se simetrala kuta ω, što ga čine pravci e_1 i (e_2), siječe s pravcem (m), koji je usporedan s pravcem e_1 i od njega udaljen za 20 mm. Kružnica (k) dodiruje trag e_1 u točki (A), a preloženi drugi trag (e_2) u točki (E). Njezin promjer (C)(D) usporedan je s e_1, a promjer (G)(H) s (e_2). Sada, kad je određen položaj osnovke toga rotacionog stošca na ravnini E, pristupimo crtanju projekcija te osnovke. Pomoću sutražnice m prvoga traga, koja ide središtem S osnovke k, nacrtamo najprije tlocrt S', nacrt S", i bokocrt S''' / $S_z S''' = S_x S'$/ toga središta. Zatim nacrtamo tlocrt C'D' = 2r promjera CD osnovke, koji je usporedan s Π_1, potom nacrt G"H" = 2r promjera GH, koji je usporedan s Π_2 i na kraju bokocrt I''' J''' = 2r promjera IJ, koji je usporedan s Π_3, pa smo dobili velike osi elipsa k', k" i k"', koje su projekcije osnovke k. Male osi tih elipsa su A'B' = 2S'A', E"F" = 2 S"E" i K''' L''' = 2b, koju dobijemo pomoću velike osi I''' J''' i točke E''' / čl. 76. E/. Nacrtamo sada projekcije o', o" i o"' osi o toga stošca / $o' \perp e_1$, $o'' \perp e_2$ i $o''' \perp e_3$/ i odredimo projekcije V', V" i V"' vrha V, koji je na toj osi, a udaljen je od točke S za 50 mm, i to na način istumačen u čl. 21, a pomoću koje god točke P osi o. Ako na kraju iz tlocrta, nacrta i bokocrta vrha V povučemo tangente na istoimene projekcije osnovaka rotacionog stošca, zatvorit ćemo tlocrt, nacrt i bokocrt toga stošca.



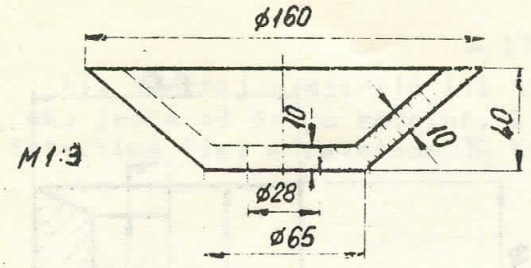
Sl. 298.

113. Predmeti s valjkastim i stožastim plohama

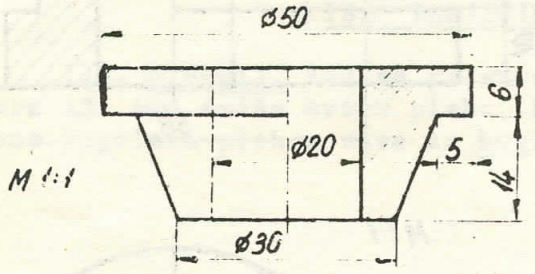
A.- Na sl. 299. nacrtan je u mjerilu 1 : 3 nacrt podmetača, i to tako, kao da mu je odstranjena prednja desna četvrtina. Budući da je predmet omedjen samo valjkastim i stožastim plohama, on će biti potpuno odredjen samo svojim nacrtom, ako pred kotama promjera njegovih kružnica stavimo oznaku za promjer, t.j. grčko slovo ϕ . Iz te slike zaključujemo, da se na tom predmetu nalaze ova geometrijska tijela: rotacioni krnji stožac, u kojemu je manji šupljji rotacioni krnji stožac i šuplji rotacioni valjak.

Nadji nacrte svakog geometrijskog tijela od kojih je taj podmetač sastavljen i nacrtaj tlocrt toga predmeta!

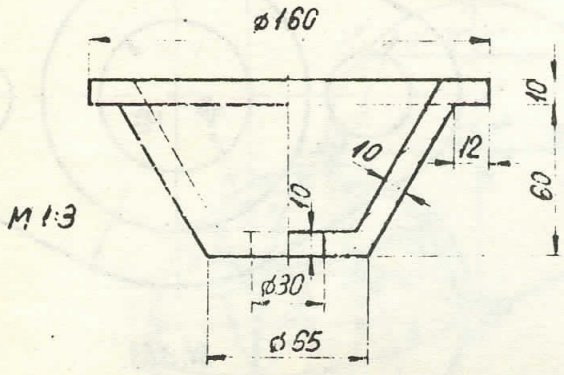
B.- Na sl. 300. nacrtan je u mjerilu 1 : 1 nacrt koničnog uloška, i to tako, kao da mu je odstranjena prednja desna četvrtina. Iz samog tog nacrta, na kojemu su promjeri kružnica predmeta označeni znakom ϕ , zaključujemo, da se na tom predmetu nalaze ova geometrijska tijela: rotaciona valjkasta ploča, rotacioni krnji stožac i rotaciona valjkasta šupljina.



Sl. 299



Sl. 300



Sl. 301

Nadji nacrt i dimenzije svakog geometrijskog tijela, koje je na tom koničnom ulošku i nacrtaj tlocrt toga predmeta!

D.- Na sl. 301. nacrtan je u mjerilu 1:3 nacrt podmetača, i to tako, kao da mu je odstranjena prednja desna četvrtina. Nabroji sva geometrijska tijela, koja se na tom predmetu nalaze i nadji njihove nacrte!

Nacrtaj tlocrt toga podmetača!

114. Vježbe.- 1. Nacrtaj sve projekcije rotacionog stošca, kojemu je središte osnovke S/60,40,20/, vrh V/15,10,20/, a promjer osnovke Φ = 30 mm!

2. Nacrtaj sve projekcije rotacionog stošca, kojemu je osnovka u ravnini E/∞,45,2·/ ako je središte te osnovke S/35,22,z/, promjer Φ = 30 mm, a visina v = 60 mm!

3. Nacrtaj sve projekcije rotacionog stošca, kojemu je osnovka u ravnini E/-100,70, 60/, središte osnovke S/-35, 25,z/, promjer osnovke Φ=30 mm, a visina v = 50 mm!

4. Nacrtaj sve projekcije rotacionog stošca, kojemu je središte osnovke S/60,40,20/, a vrh V/15,10,60/, a promjer osnovke Φ= 30 mm!

5. Nacrtaj u mjerilu 1:2 tlocrt i nacrt podmetača (sl.299.), ako jedna od dviju ravnina, kojima je odrezana njegova prednja desna četvrtina, čini s ravninom Π_2 kut od 30°!

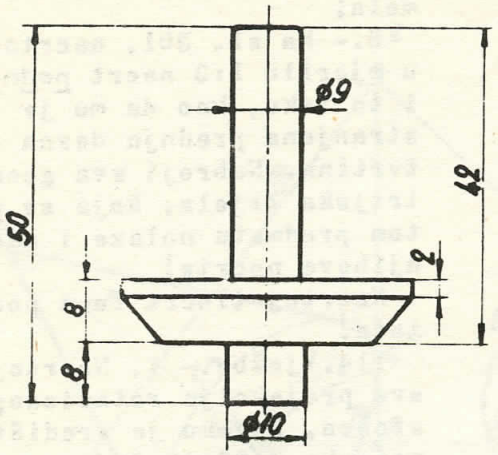
6. Nacrtaj u mjerilu 2:1 tlocrt i nacrt koničnog uloška (sl.300.), ako jedna od dviju ravnina, kojima je odrezana njegova prednja desna četvrtina, čini s ravninom Π_2 kut od 30°!

7. Nacrtaj u mjerilu 1:2 tlocrt i nacrt podmetača (sl.301.), ako jedna od dviju ravnina, kojima je odrezana njegova prednja desna četvrtina, čini s ravninom Π_2 kut od 30°!

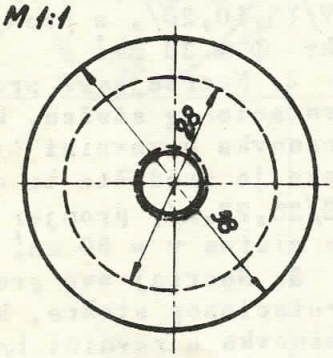
8. Nacrtaj u mjerilu 2:1 tlocrt i nacrt pladnja (sl. 302.), ako je njegova os usporedna s ravninom Π_1 , a čini s ravninom Π_2 kut od 30°!

9. Nacrtaj u mjerilu 1:1 tlocrt i nacrt očnice (sl.303.), ako jedna od dviju ravnina, kojima je odrezana nježina prednja desna četvrtina, čini s ravninom Π_2 kut od 30°!

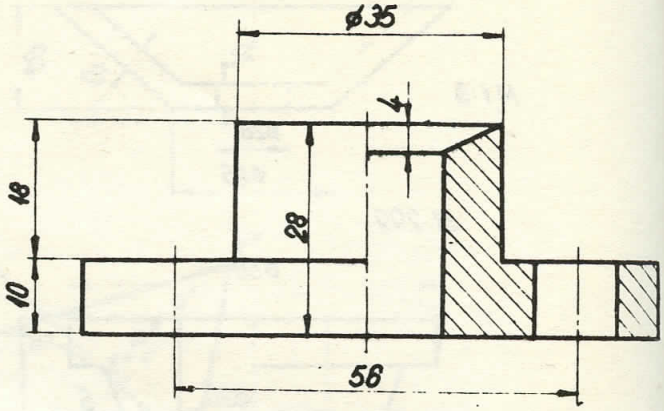
10. Nacrtaj u mjerilu 2:1 tlocrt i nacrt pladnja (sl.304.), ako jedna od dviju ravnina, kojima je odrezana njegova prednja desna četvrtina, čini s ravninom Π_2 kut od 30°!



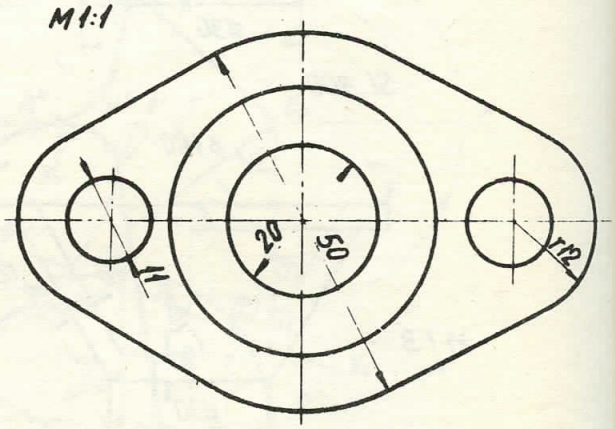
M 1:1



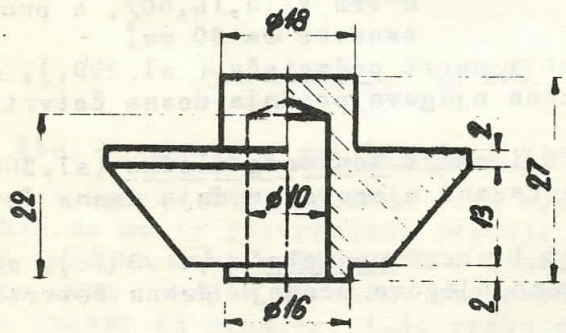
Sl. 302



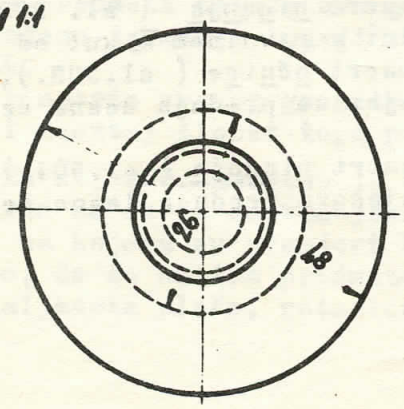
M 1:1



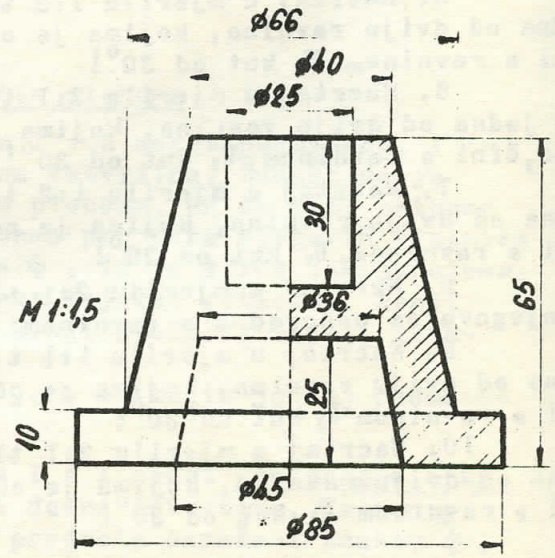
Sl. 303.



M 1:1



Sl. 304



M 1:1,5

Sl. 305.

11. Nacrtaj u mjerilu 1:1 tlocrt i nacrt aksialnog ležaja (sl. 305.), ako jedna od dviju ravnina, kojima je odrezana njegova prednja desna četvrtina, čini s ravninom Π_2 kut od 30°!

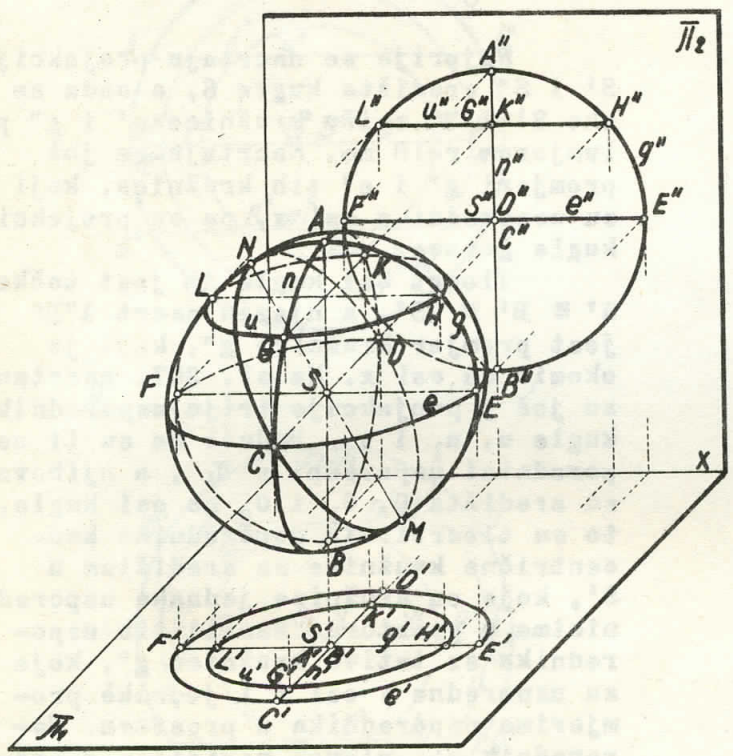
§ 15. PROJICIRANJE KUGLE

115. O kugli. Kad se polukružnica ACB (sl. 306.) zavrti oko promjera AB, ona opiše krivu plohu, koja se zove kuglina ploha, a tijelo omedjeno kuglinom plohom zove se kugla. Budući da su sve točke polukružnice ACB jednako udaljene od njezina središta S, to su i sve točke kugline plohe jednako udaljene od točke S, koja se zove središte kugle.

Dužina, koja spaja koju god točku kugline plohe sa središtem kugle, na pr. AS, BS, CS, DS i t.d., zove se polumjer kugle.

Dužina, koja prolazi središtem i spaja dvije točke kugline plohe, na pr. AB, CD, EF i t.d., zove se promjer kugle.

Promjer AB, oko kojega se polukružnica ACB vrtjela, zove se os kugle, a krajnje točke A i B te osi zovu se polovi. Sve kružnice kugle, koje idu polovima, zovu se meridijani. Budući da su meridijani zaprave različiti pološaji kružnice ACBD, oni su medju sobom jednaki.



Sl. 306.

Za vrtnje polukružnice ACB oko osi AB opisuje svaka njezina točka po jednu kružnicu, na pr. točka G opiše kružnicu GHKL. Ravnine tih kružnica su okomite na osi kugle, zato su te kružnice medju sobom usporedne, pa se zbog toga zovu usporednici ili paralele. Središta usporednika su na osi kugle. Usporednici nisu medju sobom jednaki, a najveći medju njima, kojemu je središte u središtu kugle, zove se ekvator, na pr. CEDF.

Svaka ravnina presijeca kuglinu plohu u kružnici. Ako ravnina ide središtem kugle, onda ona siječe kuglinu plohu u kružnici, kojoj je polumjer jednak polumjeru kugle, a koja se zove glavna kružnica kugle, na pr. kružnica CMDN, ekvator i svaki meridijan su glavne kružnice kugle.

Ravnina, koja ne ide središtem kugle, siječe kuglinu plohu u kružnici, kojoj je polumjer manji od polumjera kugle, a koja se zove sporedna kružnica kugle, na pr. svaki usporednik je sporedna kružnica kugle.

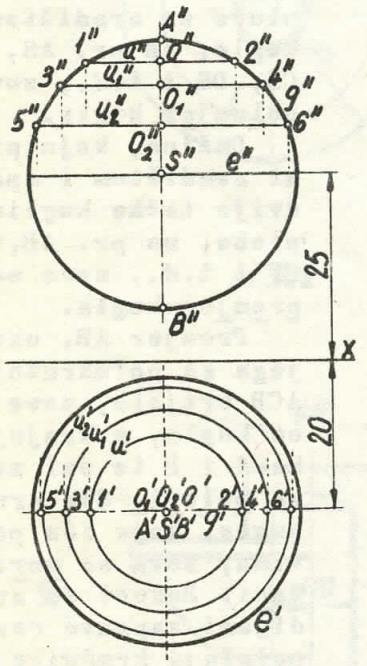
116. Projekcije kugle

A.- Ako kuglu gledamo (sl. 306.) odozgo u smjeru projiciranja na ravninu Π_1 , vidimo samo gornju polovinu kugline plohe, koja je iznad ekvatora e, t.j. koja je iznad glavne kružnice usporedne s Π_1 , zbog toga je tlocrt e' ekvatora e kontura tlocrta kugle.

Kad kuglu gledamo odsprijeda u smjeru projiciranja na ravninu Π_2 , vidimo samo prednju polovinu kugline plohe, koja je ispred meridijana g AHEMBFIN, t.j. koja je ispred meridijana, koji je usporedan s Π_2 , zbog toga je nacrt g" meridijana g kontura nacrta kugle. Meridijan g zove se glavni meridijan kugle.

Nacrt e" ekvatora je promjer kružnice g", koji je usporedan s osi x, a tlocrt g' glavnog meridijana g je promjer kružnice e', koji je usporedan s osi x. (Zašto?). Na sl. 306. nacrtane su još i projekcije u' i u" jednog usporednika u te kugle.

B.- Na sl. 307. riješen je ovaj zadatak: Neka se nacrtaju projekcije kugle, kojoj je polumjer r = 18 mm, te joj je središte S udaljeno 25 mm od Π_1 , a 20 mm od Π_2 .



Sl.307.

Najprije se nacrtaju projekcije S' i S" središta kugle S, a onda se oko S' i S" opišu kružnice e' i g" polumjerom r=18 mm. Nacrtaju se još promjeri g' i e" tih kružnica, koji su usporedni s osi x, pa su projekcije kugle gotove.

Tlocrt osi kugle AB jest točka A' ≡ B' ≡ S', a njezin nacrt A"B" jest promjer kružnice g", koji je okomit na osi x. Na sl. 307. nacrtane su još i projekcije triju usporednika kugle u, u_1 i u_2. Budući da su ti usporednici usporedni s Π_1 , a njihova su središta 0, 0_1 i 0_2 na osi kugle, to su tlocrti tih usporednika koncentrične kružnice sa središtem u S', koje su kružnice jednake usporednicima u prostoru. Nacrti tih usporednika su tetive kružnice g", koje su usporedne s osi x i jednakè promjerima usporednika u prostoru. Usporednik u i glavni meridijan g presijecaju se u točkama 1 i 2, pa projekcije točke 1 (kao i točke 2) moraju biti jedna iznad druge na istoj ordinali na projekcijama g' i g" meridijana g.

Dio kugle, koji je iznad kruga u, zove se kuglin odsječak. Kuglin odsječak omeđen je krugom kugle i dijelom kugline plohe, koji se zove kuglina kapica ili kalota.

Pokaži na slici 307. tlocrt i nacrt kuglina odsječka!

Dio kugle, koji je između ravnina dvaju usporednika, na pr. u_1 i u_2, zove se kuglin sloj. Kuglin sloj omeđuju dva usporedna kruga i dio kugline plohe, koji se zove kuglin pojas ili zona.

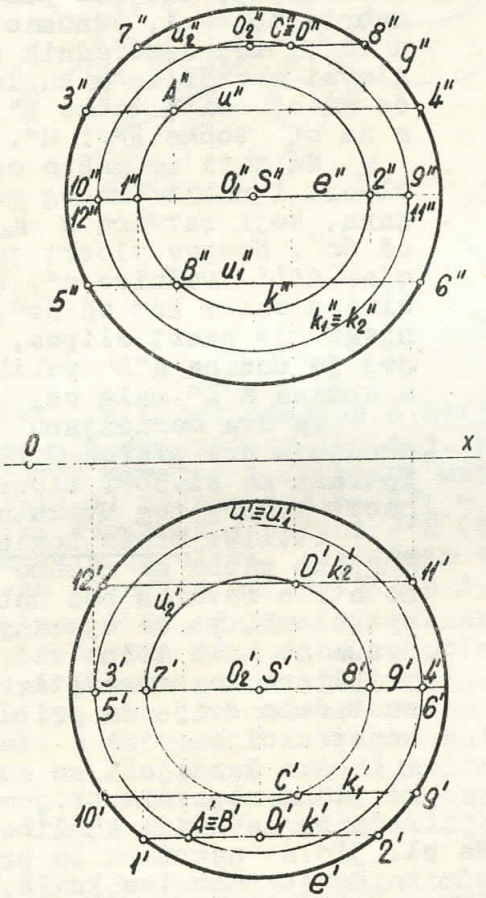
Pokaži na slici 307. tlocrt i nacrt kuglina sloja i pojasa!

117. Točke kugline plohe. Na sl. 308. nacrtane su projekcije kugle, kojoj je središte S/30,30,35/, a polumjer r = 25 mm, pa su zatim riješena ova dva zadatka:

1. Zadani su tlocrti A' ≡ B' točaka A i B, od kojih je jedna na gornjoj, a druga na donjoj polovini kugline plohe; odredi nacrte tih točaka!

Zamislimo tim točkama jednu sporednu kružnicu k, koja je usporedna s ravninom Π_2. Tlocrt k' te kružnice k bit će tetiva 1'2' kružnice e', koja ide točkom A' ≡ B' usporedo s osi x, a točka O_1' je tlocrt njenog središta O_1. Nacrt kružnice k je kružnica k", koja je koncentrična s konturom g" nacrta kugle, a promjer joj je jednak tetivi k' = 1'2'. Povučemo li točkom A' ≡ B' ordinalu, ona će presijeći kružnicu k" u traženim nacrtima A" i B" točaka A i B.

Taj zadatak možemo riješiti i ovako:



Sl.308.

Zamislimo točkom A usporednik u, a točkom B usporednik u_1. Tlocrt u' usporednika u poklapa se s tlocrtom u_1' usporednika u_1, jer oba ta tlocrta prolaze točkom A' ≡ B'. Nacrtamo zatim nacrte u" = 3"4" i u_1" = 5"6" tih usporednika. Povučemo li na kraju ordinalu točkom A' ≡ B', ona će presjeći nacrte u" i u_1" tih usporednika u traženim nacrtima A" i B" točaka A i B.

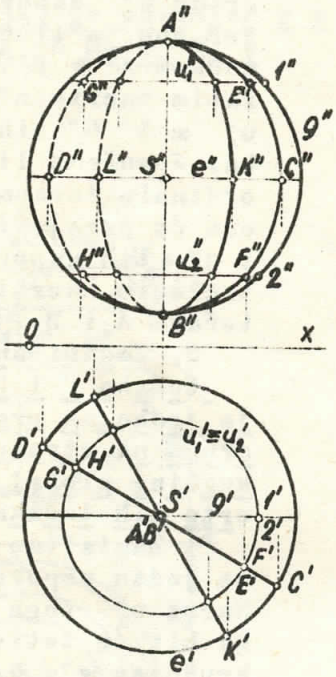
2. Zadani su nacrti C"≡D" točaka C i D, od kojih je jedna na prednjoj, a druga na stražnjoj polovini kugline plohe; odredi tlocrte tih točaka!

Zamislimo tim točkama jedan usporednik u_2. Nacrt u_2" toga usporednika bit će tetiva 7"8" kružnice g', koja ide točkom C"≡D" usporedo s osi x, a točka O_2" jest nacrt središta O_2 toga usporednika. Tlocrt usporednika u_2 je kružnica u_2', koja je koncentrična s konturom e' tlocrta kugle i ima promjer jednak tetivi u_2" = 7"8". Povučemo li točkom C" ≡ D" ordinalu, ona će presijeći kružnicu u_2' u traženim tlocrtima C' i D' točaka C i D. Taj zadatak možemo riješiti i ovako:

Zamislimo točkom A sporednu kružnicu k_1, a točkom B sporednu kružnicu k_2, koje su usporedne s ravninom Π_2. Nacrt k_1" kružnice k_1 poklapa se s nacrtom k_2" kružnice k_2, jer oba ta nacrta moraju prolaziti točkom C"≡D". Nacrtamo zatim tlocrte k_1' = 9'10' i k_2' = 11'12' tih kružnica, pa će ordinala povučena točkom C"≡D" presjeći tlocrte tih kružnica u traženim tlocrtima C' i D' točaka C i D.

118. Meridijani kugle. Zadane su projekcije kugle; nacrtaj projekcije meridijana, koji zatvaraju s ravninom Π_2 kut od 30° i od 60°!

Meridijan,koji čini s Π_2 kut od 30°, je glavna kružnica na kuglinoj plohi, koja je okomita na Π_1, a čini s Π_2 kut od 30°. Tlocrt toga meridijana bit će prema čl. 77. promjer C'D' kružnice e', koji čini s osi x kut od 30°, a nacrt toga meridijana bit će elipsa, kojoj je dužina A"B" velika os, a dužina C"D" mala os. Ta se elipsa može konstruirati pomoću kružnica zakrivljenosti njezinih tjemena, a može se odrediti i nekoliko njezinih točaka pomoću usporednika kugle, i to ovako: Oko točke S' opiše se u tlocrtu kugle koja god kružnica $u'_1 \equiv u'_2$. Ta kružnica je tlocrt usporednika u_1, koji je na gornjoj polovini kugle, i tlocrt usporednika u_2, koji je na donjoj polovini kugle, a koji imaju jednake polumjere. Na usporedniku u_1 bit će točke E i G toga meridijana, a na usporedniku u_2 bit će točke F i H. Nacrt u''_1, odnosno u''_2 usporednika u_1, odnosno u_2, nadjemo pomoću nacrta točke 1, odnosno 2, u kojoj taj usporednik siječe glavni meridijan g kugle, pa će na u''_1 biti točke E" i G", a na u''_2 točke F" i H".



Sl. 309

Na isti se način odredi tlocrt i nacrt drugog meridijana, koji zatvara s Π_2 kut od 60°. Njegov tlocrt je promjer K'L' kružnice e', koji čini s osi x kut od 60°, a njegov je nacrt elipsa, kojoj je dužina A"B" velika os, a dužina K"L" mala os.

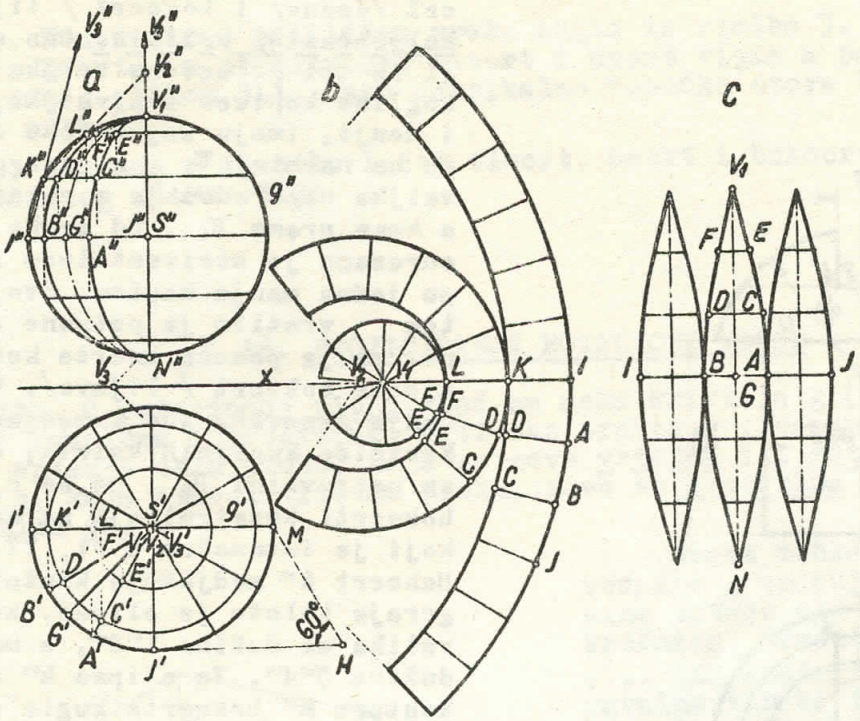
Ta dva meridijana omeđuju dva sferna dvokuta. Potraži na sl. 309. tlocrt i nacrt svakog tog dvokuta!

St.119. Mreža kugle. Kuglinu plohu ne možemo razmotati u ravninu bez nabora i prijeloma, pa se njezina mreža ne može točno već samo približno konstruirati. Upoznat ćemo dvije te približne konstrukcije.

A.- Razdijeli se kuglina ploha neparnim brojem usporednika na dvije kugline kapice i na paran broj kuglinih pojasa. Na sl. 310.a nacrtane su projekcije dvaju usporednika gornje i dvaju usporednika donje polovine kugle, ali tako da ti usporednici s ekvatorom i polovima V_1 i N dijele glavni meridijan g na 12 jednakih dijelova. Na taj je način kuglina ploha razdijeljena na dvije kapice i četiri pojasa. U svaku kapicu upiše se stožac (pol V_1 je vrh jednog takvog stošca), a u svaki pojas upiše se krnji stožac (toče V_2 i V_3 su vrhovi dopunjaka takvih krnjih stožaca), pa se plaštevi tih stožaca i krnjih stožaca razmotaju na ravninu slike (čl.108.A. i čl. 111.C).

Na sl. 310.a ti su plaštevi razdijeljeni pomoću meridijana kugle na 12 jednakih dijelova, a zatim su na sl. 310.b razmotani u ravnini slike samo oni plaštevi, koji su upisani u gornjoj polovini kugline plohe.

B.- Razdijeli se kuglina ploha pomoću meridijana na što više jednakih sfernih dvokuta. Na sl. 310.a ona je razdijeljena na 12 jednakih sfernih dvokuta. U jednom od tih dvokuta, na pr., u dvokutu, kojem je tlo-

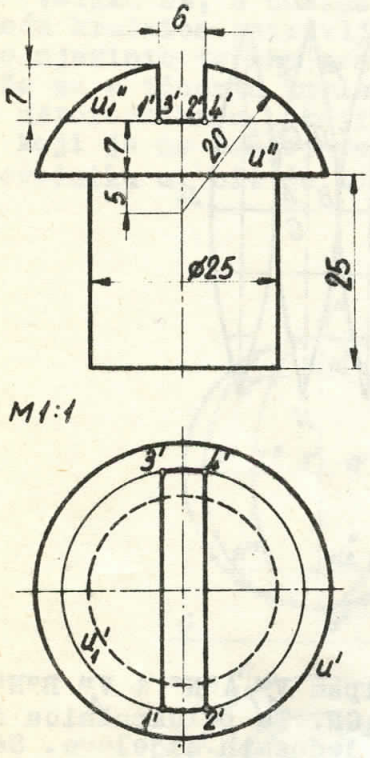


Sl.310. a, b, c.

crt A'B'V_1' , a nacrt omedjen s dvije polovine elipsa V_1'' A"N" i V_1'' B"N", nacrta se njegova simetrala, t.j. polukružnica V_1GN. Tu polukružnicu dijele polovi, ekvator i nacrtani usporednici na 6 jednakih dijelova. Sad se (sl. 31o c) nacrta dužina $NV_1 = 2r\pi$ (r je polumjer kugle), koja je jednaka dvostrukoj dužini J'H (čl. 74. A), pa se ta dužina razdijeli na 6 jednakih dijelova. Djelišnim točkama povuku se okomice na dužinu NV_1, pa se na njima odrede točke A,B,C,D,E i F tako, da bude dužina AB jednaka luku A'B', dužina CD jednaka luku C'D', a dužina EF jednaka luku E'F', i da sve te dužine raspolavlja dužina NV_1. Krajnjim točkama tih dužina povuku se na kraju dvije s obzirom na dužinu NV_1 simetrične krivulje, pa nam one zatvore mrežu jednog sfernog dvokuta. Te se krivulje sijeku u točkama N i V_1 pod kutom od 30°, jer je kuglina ploha razdijeljena na sl. 31o.a meridijanima na 12 jednakih dvokuta. Na sl. 31o.c nacrtane su mreže još dvaju susjednih dvokuta, pa je na taj način približno odredjena mreža prednje lijeve četvrtine kugline plohe.

12o. Predmeti s kuglastom plohom

A.- Slikom 311., koja je nacrtana u mjerilu 1 : 1, odredjen je vijak s polukuglastom glavom. Njegova glava je kuglina kapica ili kalota, na kojoj je utor. Širina utora je 6 mm, a dubina 7 mm. Pomoću tih dimenzija nacrtan je nacrt utora, a njegov je tlocrt konstruiran pomoću tlocrta u_1' usporednika u_1, na kojemu su vrhovi osnovke 1,2,3 i 4 toga utora. Ispitaj tu konstrukciju!



Sl.311.

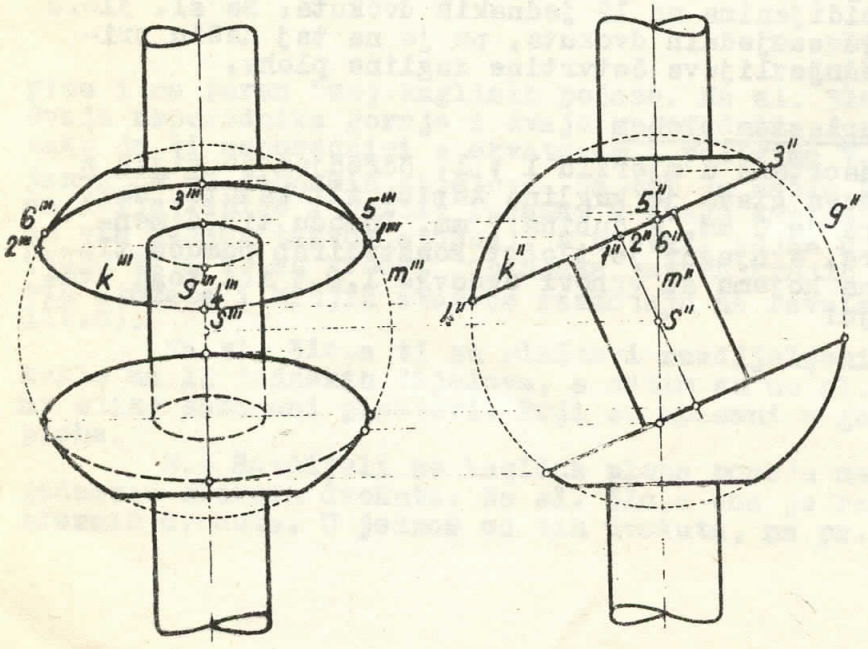
St.B.- Na sl. 312. nacrtan je nacrt /desno/ i bokocrt / lijevo/ koljenčastog vratila. Ono se sastoji iz tri rotaciona valjka i dvije kugline kapice. Dva valjka, gornji i donji, imaju zajedničku os okomitu na ravnini π_1 , a os središnjeg valjka usporedna je s ravninom π_2 , a kosa prema π_1 . Od svake kapice odrezana je horizontalnom ravninom po jedna manja kapica. Svojim nacrtom vratilo je potpuno odredjeno, pa je pomoću nacrta konstruiran njegov bokocrt / lijevo/. Gornja i donja osnovka, kao i medjašnje kružnice kuglinih kalota, okomite su na ravnini π_2 , pa se njihovi bokocrti konstruiraju na način, koji je istumačen u čl. 77. B. Bokocrt k''' medjašnje kružnice k gornje kalote je elipsa, kojoj je velika os dužina 1'''2''', a mala os dužina 3'''4'''. Ta elipsa k''' dodiruje konturu m''' bokocrta kugle u točkama 5''' i 6''', koje su bokocrti onih točaka 5 i 6, u kojima se konturni meridijan bokocrta m siječe s kružnicom k. Nacrti 5'' i 6'' tih točaka pomoću kojih se odrede bokocrti 5''' i 6''', nalaze se u sjecištu nacrta k'' kružnice k i nacrta m'' meridijana m.

Ispitaj konstrukciju bokocrta svih sastavnih dijelova toga predmeta!

121. Vježbe. 1. Na kugli, kojoj je središte S/0,30,30/, a polumjer r=25 mm, nalaze se točke A i B, kojima je odredjen tlocrt $A' \equiv B'$/10,40,z/; odredi nacrte tih točaka!

2. Na kugli, kojoj je središte S/0,35,30/, a polumjer r=25 mm, nalaze se točke C i D, kojima je odredjen nacrt C'' ≡ D''/5,y, 40/; odredi tlocrte tih točaka!

3. Nacrtaj tlocrt i nacrt onih usporednika i meridijana kugle, kojoj je središte S/0, 40,45/, a polumjer r = 30 mm, koji su medju sobom udaljeni po 30°!



Sl.312.

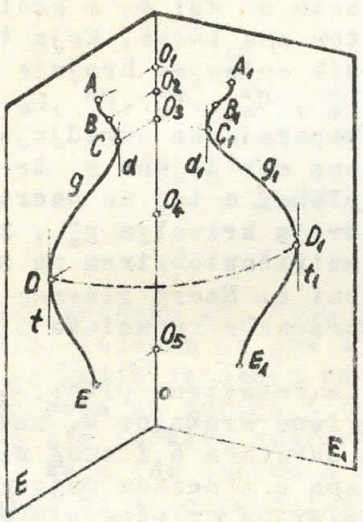
4. Konstruiraj približnu mrežu kugle iz vježbe 3. na oba načina!

5. Nacrtaj u mjerilu 2:1 tlocrt i nacrt vijka s polukuglastom glavom zadanog slikom 311., ako vertikalne pobočke utora čine s ravninom Π_2 kut od 60°!

6. Nacrtaj u mjerilu 1,5:1 tlocrt, nacrt i bokocrt koljenčastog vratila zadanog slikom 312!

§ 16. PROJICIRANJE ROTACIONE PLOHE

122. O rotacionoj plohi. Kad se neka krivulja g (sl.313.), koja može biti ravnična i prostorna, vrti oko pravca o , ona pri toj vrtnji ili rotaciji opisuje oblu plohu, koja se zove vrtežna ili rotaciona ploha. Krivulja g, koja izvodi vrtežnu plohu, zove se izvodnica te plohe, a pravac o je njezina os.



Sl.313.

Svaka točka A,B,C, ... izvodnice g opisuje za vrijeme njezine vrtnje oko osi o po jednu kružnicu. Središta O_1, O_2, O_3, ... tih kružnica su na osi o, a ravnine tih kružnica su okomite na osi o. Te su kružnice medju sobom usporedne, pa se zbog toga zovu usporednici ili paralele rotacione plohe. Ako tangente d i t krivulje g, koje su usporedne s osi o, dodiruju tu krivulju u točkama C i D, onda je usporednik, što ga opisuje točka C, najmanji usporednik te rotacione plohe, a zove se grlena kružnica, dok je usporednik, što ga opisuje točka D, najveći usporednik te rotacione plohe, a zove se ekvator.

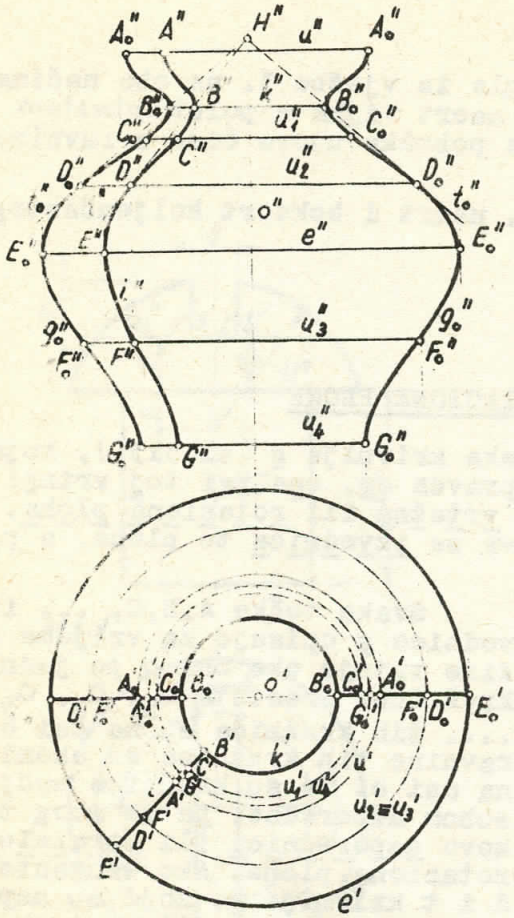
Svaka ravnina položena osju rotacione plohe siječe tu plohu u krivulji, koja se zove meridijan te plohe. Svi su meridijani medju sobom sukladni, a onaj meridijan, koji je usporedan s vertikalnom ravninom Π_2, zove se glavni meridijan. Os rotacione plohe dijeli svaki meridijan na dva sukladna polumeridijana. Ravnina svakog meridijana siječe ravninu svakog usporednika pod pravim kutem, zbog toga svaki meridijan siječe svaki usporednik pod pravim kutem.

Ravnina svakog meridijana je ravnina simetrije rotacione plohe.

Dio prostora, koji je omedjen rotacionom plohom, jednom ili dvjema ravninama, koje su okomite na njezinoj osi, zove se vrtežno ili rotaciono tijelo.

Uspravni kružni valjak, uspravni kružni stožac i kugla su također rotaciona tijela.

123. Projekcije rotacione plohe. Zadane su projekcije i' i i" krivulje i, koja je u ravnini okomitoj na Π_1, te projekcije pravca o, koji je u pravnini krivulje i, a okomit je na Π_1; neka se nacrtaju projekcije rotacione plohe, koju opisuje krivulja i, kad se vrti oko pravca o!



Sl.314.

Na projekcijama i' i i" krivulje i označe se projekcije nekoliko njezinih točaka A,B,C,D, E,F i G, pa se nacrtaju projekcije usporednika, koje te točke opisuju za vrtnje krivulje i oko pravca o. Tlocrt svakog usporednika je kružnica, kojoj je središte u tlocrtu o' osi o, a prolazi tlocrtom one točke, koja taj usporednik opisuje. Tlocrti usporednika su dakle koncentrične kružnice. Na toj rotacionoj plohi opisuje točka B grlenu kružnicu k, a točka E ekvator e. Tlocrt k' grlene kružnice i tlocrt e' ekvatora omedjuju tlocrt te rotacione plohe.

Nacrt svakog usporednika je dužina, koja je jednaka njegovom promjeru, okomita je na nacrtu o" osi o, a prolazi nacrtom one točke, koja taj usporednik opisuje. Krajnje točke A_o'', B_o'', C_o'', D_o'', F_o'', G_o'' nacrta tih usporednika odredjuju nacrt glavnog meridijana g_o te rotacione plohe, a taj se nacrt sastoji iz dviju krivulja g_o'', koje su simetrične obzirom na nacrt o" osi o. Nacrt glavnog meridijana i nacrti u" i u_4'' najgornjeg i najdonjeg usporednika rotacione plohe čine konturu nacrta te plohe.

U tlocrtu vidi se onaj unutrašnji dio te rotacione plohe, koji se nalazi izmedju najgornjeg usporednika u i grlene kružnice k, zatim onaj vanjski dio te plohe, koji se nalazi izmedju ekvatora e i onog usporednika, koji je povrh njega, a kojemu se tlocrt poklapa s tlocrtom najgornjeg usporednika. U nacrtu vidi se čitava prednja polovina vrtežne plohe, a koja je ispred ravnine glavnog meridijana.

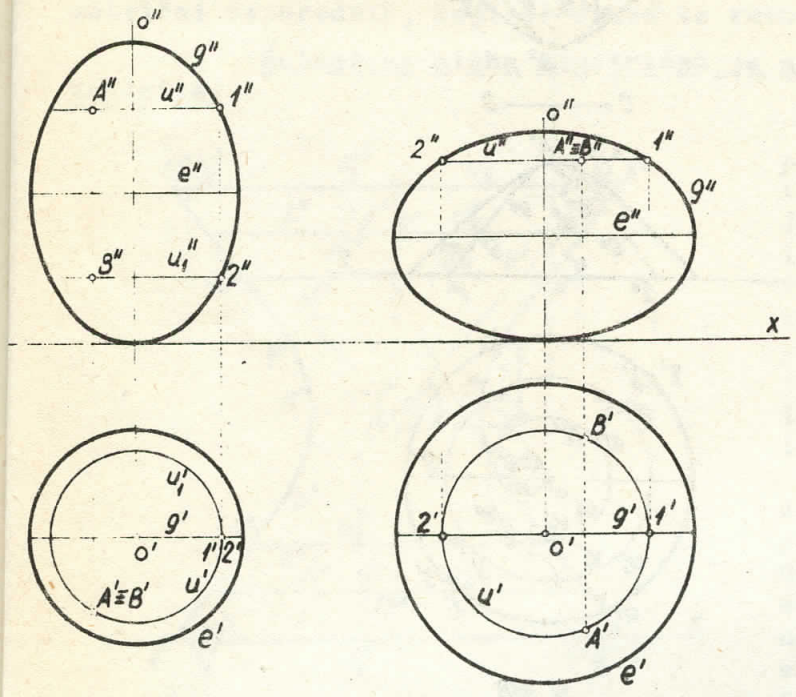
Promotri na sl. 314. tlocrte i nacrte pojedinih usporednika te rotacione plohe!

Ako tangenta t izvodnice i u točki D siječe os u točki H, opisuje ta tangenta, za vrtnje izvodnice i oko osi o, rotacioni stožac, kojemu je točka H vrh, i koji dodiruje rotacionu plohu u usporedniku u_2, što ga opisuje točka D.

Tangenta izvodnice i u točki E, koja je usporedna s osi o, opisuje, za vrtnje izvodnice i oko osi o, rotacioni valjak, koji dodiruje rotacionu plohu u ekvatoru e, što ga opisuje točka E.

St. 124. Rotacione plohe drugoga reda. Plohe, koje neki pravac može probosti najviše u dvije točke, zovu se plohe drugoga reda. Valjak, stožac ili kugla su dakle rotacione plohe drugoga reda, ali pored njih postoje još i druge rotacione plohe drugoga reda, a to su:

A.- Dugoljasti ili jajoliki elipsoid nastaje, kad se elipsa vrti oko svoje velike osi /sl. 315./. Ako je os tog elipsoida okomita na ravnini π_1, onda je njegov tlocrt omedjen kružnicom e', kojoj je promjer jednak maloj osi elipse izvodnice, a njegov nacrt je omedjen elipsom g", koja je sukladna s elipsom izvodnicom.



Sl.315.

Sl.316.

Na sl. 315. riješen je još i ovaj zadatak: Zadani su tlocrti $A' \equiv B'$ točaka A i B, od kojih je jedna na gornjoj, a druga na donjoj polovini toga elipsoida; neka se odrede nacrti tih točaka!

Zamislimo točkom A usporednik u, a točkom B usporednik u_1. Tlocrti u' i u_1' tih usporednika poklapaju se, jer oba ta tlocrta moraju prolaziti točkom $A' \equiv B'$. Pomoću točaka $1' \equiv 2'$, u kojima tlocrti tih usporednika sijeku tlocrt g' glavnog meridijana, nadjemo nacrte u" i $u_1"$ tih usporednika, a na njima tražene nacrte A" i B" točaka A i B.

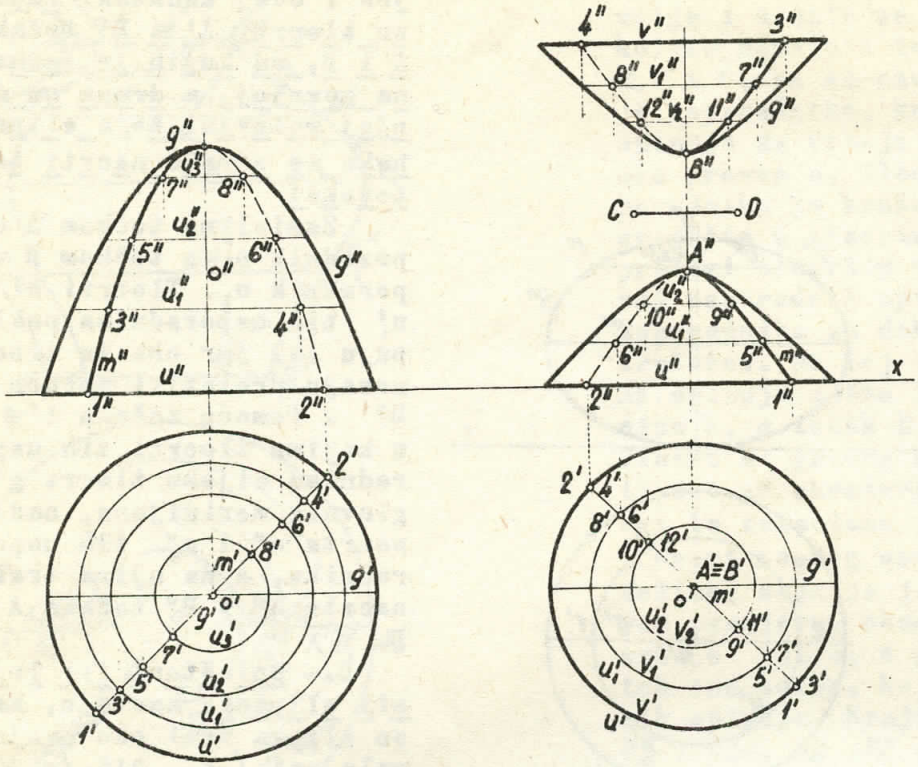
B.- Sploštení ili leća-sti elipsoid nastaje, kad se elipsa vrti oko svoje male osi / sl. 316./. Ako je os toga elipsoida okomita na π_1, njegov je tlocrt omedjen kružnicom e', kojoj je promjer jednak velikoj osi elipse izvodnice, a njegov nacrt je omedjen elipsom g", koja je sukladna s elipsom izvodnicom.

Na sl. 316. riješen je još i ovaj zadatak: Zadani su nacrti $A" \equiv B"$ točaka A_1 i B_1 od kojih je jedna na prednjoj, a druga na stražnjoj polovini toga elipsoida; neka se odrede tlocrti tih točaka!

Zamislimo tim točkama uporednik u. Nacrt u" toga usporednika je tetiva 1"2" elipse g", koja ide točkom $A" \equiv B"$ usporedo s osi x. Na tlocrtu u' toga usporednika, koji je kružnica promjera 1'2', nalaze se traženi tlocrti A' i B' točaka A i B.

C.- Rotacioni paraboloid nastaje kad se parabola vrti oko svoje osi. Na sl. 317. nacrtane su projekcije jednog dijela rotacionog paraboloida, kojemu je os okomita na ravnini π_1. Njegov je tlocrt omedjen tlocrtom u' usporednika u, koji je u ravnini π_1, a njegov je nacrt omedjen nacrtom u" usporednika u i parabolom g", koja je sukladna s parabolom izvodnicom. Na toj slici nacrtani su zatim nacrti $u_1"$, $u_2"$ i $u_3"$ usporednika u_1, u_2 i u_3, pa su konstruirani njihovi tlocrti u_1', u_2' i u_3'. Nakon toga nacrtan je tlocrt m' jednog meridijana m toga paraboloida, pa je konstruiran njegov nacrt m" pomoću nacrta onih točaka toga meridijana, koji su na nacrtanim usporednicima.

D. Dvoplošni rotacioni hiperboloid nastaje, kad se hiperbola vrti oko svoje realne osi. Svaka grana hiperbole izvodnice opisuje po jednu plohu toga hiperboloida. Na sl. 318. nacrtane su projekcije jednog dijela toga hiperboloida, kao i projekcije jednog njegovog meridijana m, ako je os toga hiperboloida okomita na ravnini π_1.



Sl. 317.

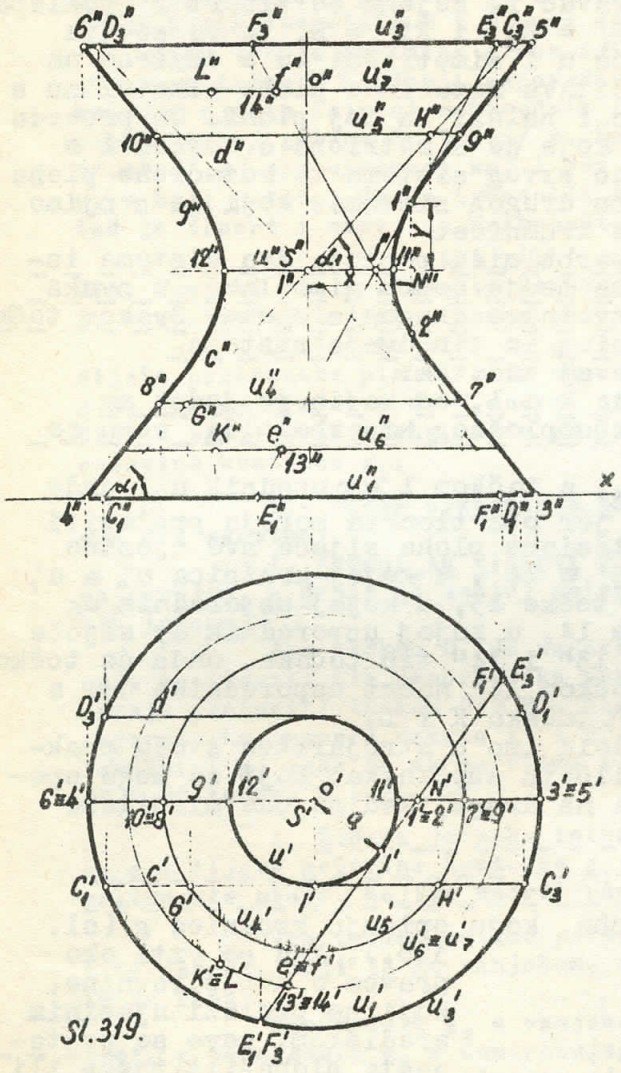
Sl. 318.

El- Jednoplošni hiperboloid nastaje, kad se hiperbola vrti oko svoje imaginarne osi. Na sl. 319. nacrtane su projekcije onog dijela toga hiperboloida, kojemu je os okomita na ravnini Π_1, koji je omeđen s donje strane ravninom Π_1, a s gornje horizontalnom ravninom Π_3, koja je od središta S plohe isto toliko udaljena koliko i ravnina Π_1.

Isti taj hiperboloid, kako ćemo niže dokazati, može se dobiti okretanjem pravca c oko osi o, kad pravac c ne siječe, već mimoilazi os o, a nije okomit na toj osi. Pravac c (c',c") uzet je na sl. 319. usporedan s ravninom Π_2. On probada Π_1 u točki C_1, a Π_3 u točki C_3, i ima prvi prikloni kut α_1. Najkraća udaljenost osi o od pravca c jednaka je dužini SI = a, kojoj je tlocrt S'I', a nacrt točka S"≡ I". Kad se pravac c vrti oko osi o, opisuje njegova točka C_1 usporednik u_1 /u_1', u_1''/, točka C_3 usporednik u_3/u_3', u_3''/, a točka I grlenu kružnicu u /u', u"/, kojoj je promjer r = a. Razni položaji toga pravca su izvodnice te rotacione plohe. Usporednici u_1 i u_3 su simetrični s obzirom na ravninu Γ grlene kružnice u. Krajnje točke nacrta tih usporednika, t.j. točke 3" i 4", 5" i 6", te 11" i 12" su na nacrtu g" glavnog meridijana g te rotacione plohe. Da bi se dobilo još točaka nacrta toga meridijana, istakne se na izvodnici c koja god točka, na pr. G/G',G"/, pa se nacrta tlocrt u_4' i nacrt u_4'' usporednika u_4, što ga opisuje ta točka. Tlocrt u_4' je kružnica, koja ide točkom G', a nacrt u_4'' je dužina usporedna s osi x, koja ide točkom G". Krajnje točke 7" i 8" nacrta u_4'' toga usporednika su na g". Istaknimo sada na izvodnici i točku H, koja je povrh ravnine grlene kružnice Γ, a koja je udaljena od te kružnice isto toliko koliko je od nje udaljena točka G. Za tu točku H mora dakle biti I'H' = I'G' i I"H" = I"G". Kako je S'H' = S'G', to se tlocrt u_5' usporednika u_5, što ga opisuje točka H, poklapa s tlocrtom u_4' usporednika u_4, što ga opisuje točka G, a nacrti tih usporednika u_4'' i

u_5'' jednako su udaljeni od nacrta u'' grlene kružnice. Krajnja točka 9", odnosno 10", nacrta u_5'' usporednika u_5 simetrična je s obzirom na nacrt u'' grlene kružnice s krajnjom točkom 7", odnosno 8", nacrta usporednika u_4. Iz toga zaključujemo, da za svaki usporednik te rotacione plohe, koji je ispod ravnine Γ grlene kružnice, postoji na toj plohi njemu simetrični usporednik, koji je iznad te ravnine.

Rotaciona ploha simetrična je s obzirom na ravninu grlene kružnice.



Sl.319.

Ako je pravac e koji god položaj izvodnice e, onda njegov tlocrt e' dodiruje u', u točki J', a siječe u_1' u točki E_1', i u_3' u točki E_3'. Nacrti točaka J, E_1 i E_3 morajū biti na nacrtu e" pravca e. Ako pravac e probada ravninu glavnog meridijana g u točki 1, onda je 1' na tlocrtu g', a 1" na nacrtu g" toga meridijana.

Da je taj glavni meridijan, koji se na ravninu Π_2 projicira u pravoj veličini, doista hiperbola, dokazat ćemo ovako: U pravokutnom koordinatnom sustavu, koji je u ravnini slike, a kojemu je točka S" ishodište, pravac u" os apscisa, a pravac o" os ordinata, ima koja god točka 1" nacrta g" toga glavnog meridijana apscisu $x = S"N" = S'N'$ i ordinatu $y = N"1"$.

Iz pravokutnog trokuta S'J' N' izlazi, da je

$$\overline{S'N'}^2 - \overline{N'J'}^2 = \overline{S'J'}^2 \quad \text{ili}$$

$$x^2 - \overline{N'J'}^2 = a^2, \qquad /2/$$

ako je $r = a$ polumjer grlene kružnice u. Iz pravokutnog trokuta u prostoru JN1 izlazi, da je $NJ = N1 \operatorname{cotg} \alpha_1$ ili $N'J' = N"1" \operatorname{cotg} \alpha_1$ ili $N'J' = y \operatorname{cotg} \alpha_1$.

Prema tome je $x^2 - y^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha_1 = a^2$, ili

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(a \operatorname{tg} \alpha_1)^2} = 1.$$

Budući da su veličine a i α_1 konstantne za sve izvodnice te rotacione plohe, možemo staviti da je $a \operatorname{tg} \alpha_1 = b$, pa jednadžba nacrta glavnog meridijana, kao i samog meridijana, jer su te krivulje sukladne, glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Glavni meridijan te rotacione plohe je hiperbola, kojoj je realna poluos = a, a imaginarna poluos $b = a \operatorname{tg} \alpha_1$, pa je prema tome ta rotacione plohe jednoplošni rotacioni hiperboloid.

Dva različita položaja izvodnice c ne mogu se medju sobom sjeći, jer je svaka izvodnica te rotacione plohe nastala rotacijom izvodnice c oko osi o, s kojom se ona mimoilazi. Svi položaji izvodnice c čine jedan sistem izvodnica te rotacione plohe. Tome sistemu pripada promatrani pravac e, kao i pravac d(d' ∥ c', d" = [D_1'' D_3'']), u koji položaj dodje izvodnica c nakon vrtnje od +180° oko osi o. Budući da pravci c i d probadaju ravninu glavnog meridijana g u beskonačnosti, to će nacrti c" i d" tih pravaca biti asimptote nacrta g" glavnog meridijana.

Pored toga sistema pravaca postoji na toj rotacionoj plohi još jedan sistem pravaca. Uočimo na pr. pravac f, kojemu se tlocrt f' poklapa s tlocrtom e' pravca e, a za koji je $F_1' = E_3'$ i $F_3' = E_1'$. Ta se dva pravca sijeku u točki J grlene kružnice u i simetrični su s obzirom na ravninu Γ te kružnice. Budući da je čitava rotaciona ploha simetrična s obzirom na ravninu Γ, to se i pravac f nalazi na toj plohi. On probada ravninu glavnog meridijana u točki 2, koja je simetrična s točkom 1 s obzirom na ravninu Γ. Za svaki pravac prvog sistema te rotacione plohe postoji dakle na toj plohi jedan pravac drugog sistema, koji je s njime simetričan s obzirom na ravninu grlene kružnice.

Na jednoplošnom rotacionom hiperboloidu postoje dva sistema izvodnica. Sve se izvodnice istog sistema medju sobom mimoilaze, a svaka izvodnica jednog sistema siječe sve izvodnice drugog sistema. Svakom točkom te rotacione plohe ide po jedna izvodnica iz tih dvaju sistema.

Na sl. 319. riješen je još i ovaj zadatak:

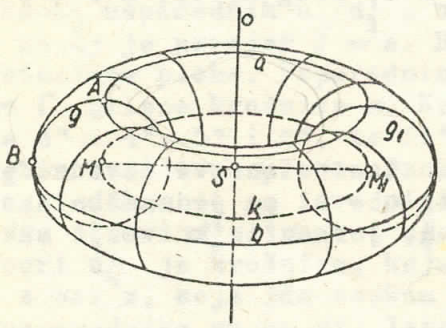
Zadani su tlocrti K' ≡ L' točaka K i L, od kojih je jedna na donjoj, a druga na gornjoj polovini jednoplošnog hiperboloida, neka se odrede nacrti tih točaka.

Ako tačkom K ide usporednik u_6, a točkom L usporednik u_7, onda se tlocrti tih usporednika poklapaju, jer oba tlocrta moraju prolaziti točkom K' ≡ L'. Svaki usporednik te rotacione plohe siječe sve njezine izvodnice, pa će prema tome u točki 13' ≡ 14', u kojoj kružnica $u_6' \equiv u_7'$ siječe pravac e' ≡ f', biti tlocrt one točke 13, u kojoj usporednik u_6 siječe izvodnicu e, i tlocrt one točke 14, u kojoj usporednik u_7 siječe izvodnicu f. Odredimo li zatim nacrte 13" i 14" tih točaka, onda će točkom 13" ići nacrt u_6'' usporednika u_6, a točkom 14" nacrt usporednika u_7, a na njima bit će traženi nacrti K" i L" točaka K i L.

Jednoplošni rotacioni hiperboloid ima u strojarstvu svoju praktičnu primjenu u konstrukciji hiperboličnih zupčanika, koji se mogu upotrebiti za prenos rotacije s jedne osi na drugu, kad se one mimoilaze pod kojim god kutom.

125. Prstenasta ploha

A.- O prstenastoj plohi. Rotaciona ploha, koju opisuje kružnica g (sl. 32o.), kad se vrti oko pravca o svoje ravnine, koji ne prolazi njezinim središtem, zove se prstenasta ploha ili torus ili anuloid. Kružnica g je izvodnica, a pravac o os te rotacione plohe. Središte M kružnice g opisuje središnju kružnicu k te rotacione plohe, a svaka točka kružnice g opisuje po jedan njezin usporednik. Na sl. 32o. prikazani su različiti položaji kružnice g, zatim središnja kružnica k, kao i usporednici a i b, što ih



Sl.32o.

opisuju točke A i B.

B.- Projekcije prstenaste plohe. Zadane su projekcije g' i g" kružnice izvodnice g_1 kojoj je ravnina usporedna s ravninom Π_2, zatim projekcije o' i o" osi o, koja je okomita na ravninu Π_1, a nalazi se u ravnini kružnice g; neka se nacrtaju projekcije prstenaste plohe, koju opisuje kružnica g_1 kad se vrti oko osi o! / sl. 321./

Označimo projekcije A',A" i C',C" krajnjih točaka A i C onog promjera kružnice g, koji je okomit na Π_1, a zatim projekcije B',B" i D',D" krajnjih točaka B i D onog njezinog promjera, koji je usporedan s Π_1. Za vrtnje kružnice g oko osi o opisuje točka A najgornji usporednik a, a točka C najdonji usporednik c'te rotacione plohe, dok točka B opisuje njezin najveći usporednik / ekvator/ e, a točka D njezin najmanji usporednik / grlenu kružnicu/ d. Kad se nacrtaju projekcije a',a",b',b", c',c",d',d" tih usporednika, i još tome projekcije g_1' i g_1'' kružnice g_1, u koji položaj dodje izvodnica g nakon vrtnje oko osi o za kut od 180°, tad je tlocrt i nacrt te prstenaste plohe gotov.

Na prstenastoj plohi razlikujemo njezin vanjski i unutarnji dio. Vanjski dio prstenaste plohe opisuje lijeva polovina ADC izvodnice g, a unutrašnji njezina desna polovina ADC.

U tlocrtu vidi se gornja polovina vanjskog i unutrašnjeg dijela prstenaste plohe, i to od ekvatora e preko najvišeg usporednika a do glavne kružnice d. U nacrtu vidi se samo prednja polovina vanjskog dijela prstenaste plohe, i to od lijeve polovine kružnice g do desne polovine kružnice g_1.

C.- Točke prstenaste plohe. Na sl. 321. riješena su još i ova dva zadatka:

1. Zadani su tlocrti D' ≡ E' točaka D i E, od kojih je jedna na gornjoj, a druga na donjoj polovini prstenaste plohe; odredi nacrte tih točaka!

Ako točkom D ide usporednik u, a točkom E usporednik u_1, onda se tlocrti tih usporednika poklapaju, jer oba tlocrta u' i u_1' moraju prolaziti točkom D' ≡ E'. Nacrtamo li zatim nacrte u" i u_1'' tih usporednika, pomoću nacrta 1" i 2" onih njihovih točaka 1 i 2 koje su na izvodnici g, onda će na nacrtima tih usporednika biti traženi nacrti D" i E" točaka D i E.

2. Zadana je neka točka između nacrta desne polovine kružnice g i lijeve polovine kružnice g_1 i neka se odrede tlocrti onih točaka prstenaste plohe, kojima nacrti padaju u tu točku!

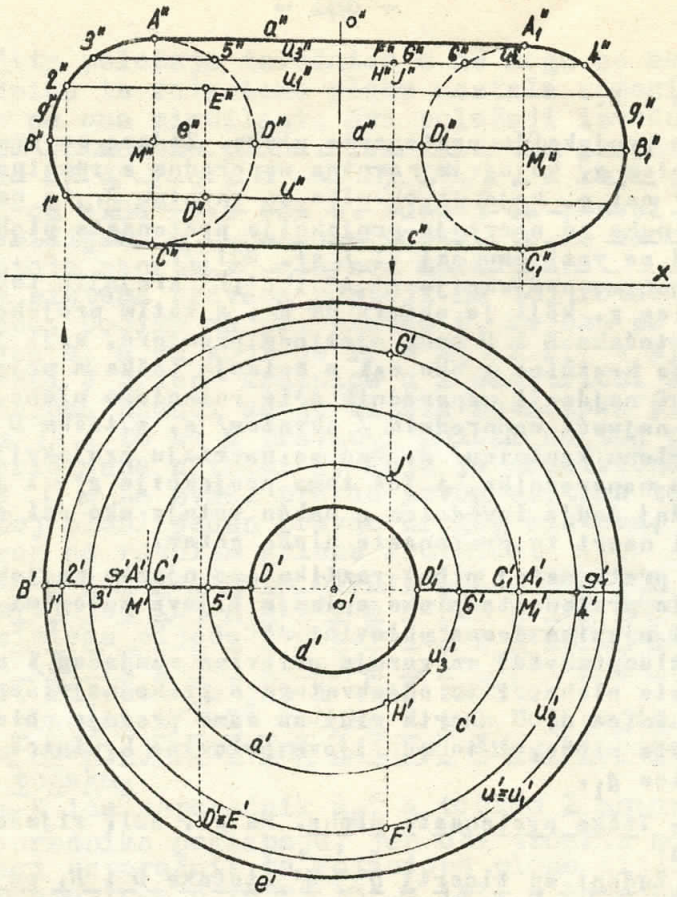
Tom točkom možemo povući nacrte dvaju usporednika te plohe, i to jednog, koji je na vanjskom, a drugog, koji je na unutrašnjem dijelu te plohe.

Usporednik u_2 s vanjskog dijela ima za nacrt dužinu $u_2'' = 3''4''$, a usporednik u_3 s unutrašnjeg dijela ima za nacrt dužinu $u_3'' = 5''6''$. Nacrtamo li zatim tlocrte u_2' i u_3' tih usporednika, i povučemo li ordinalu zadanom točkom, ta će ordinala presjeći kružnicu u_2' u točkama F' i G', a kružnicu u_3' u točkama H' i J'. Postoje prema tome na prstenastoj plohi četiri točke, i to dvije F i G na vanjskom dijelu, a dvije H i J na njezinom unutrašnjem dijelu, kojima se nacrti F", G",H" i J" poklapaju u zadanoj točki.

126. Predmeti s prstenastim plohama

A.- Na sl. 322. nacrtan je u mjerilu 1:10 nacrt podnožja željeznog valjkastog stupa. Budući je to podnožje rotaciono tijelo, ono je potpuno odredjeno svojim nacrtom uz upotrebu oznake Φ za njegove promjere.

Ispitaj, koja se geometrijska tijela nalaze na tom predmetu!



Sl.321.

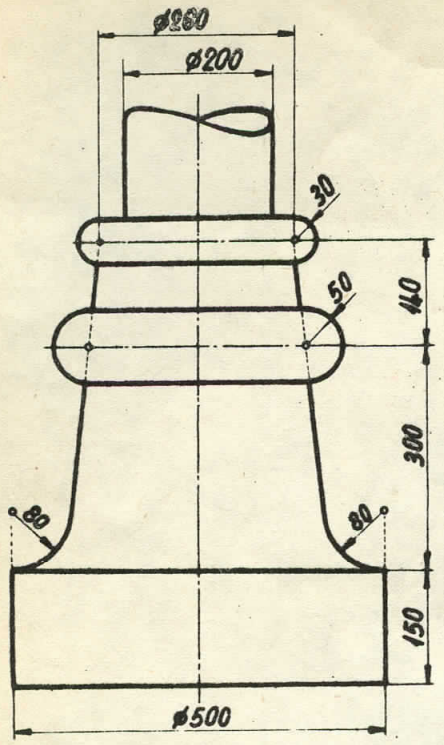
B.- Na sl.323. nacrtan je nacrt i lijevi bokocrt u mjerilu 1:10 cjevovoda s dva koljena. Na svakom koljenu nalazi se četvrtina prstenaste plohe, kojoj središnja kružnica ima polumjer r = 150 mm, a izvodnica promjer Φ = 100 mm. Os prstenaste plohe na donjem koljenu okomita je na ravnini Π_3 , a one na gornjem koljenu okomita je na ravnini Π_2 . Nacrtaj tlocrt, nacrt i bokocrt toga cjevovoda u mjerilu 1:5!

C.- Na sl. 324. nacrtan je u mjerilu 1:2 nacrt užnice. Ona se sastoji od dviju valjkastih rotacionih ploča, medju kojima se nalazi rotaciono tijelo, koje je omedjeno unutrašnjim dijelom prstenaste plohe, a kroz sva ta tijela prolazi valjkasta šupljina.
Koje dimenzije imaju ta geometrijska tijela?

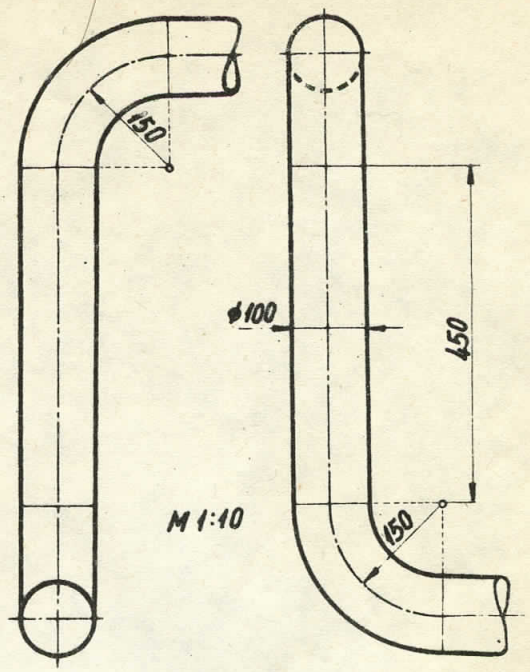
127. Vježbe.- 1. Zadan je tlocrt i nacrt koje god krivulje g i pravca o, koji je okomit na ravnini Π_1 ; konstruiraj projekcije rotacione plohe, koju opisuje krivulja g, kad se vrti oko pravca o, i projekcije njezinog meridijana, kojega ravnina čini s ravninom Π_2 kut od 45°!

2. Nacrtaj projekcije torusa iz slike 321., kojemu je odrezana a/ prednja polovina, b/ prednja desna četvrtina!

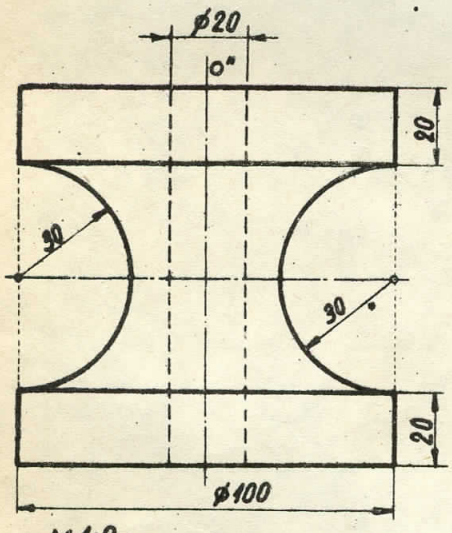
3. Nacrtaj sve projekcije lijeve gornje četvrtine torusa, kojemu je os okomita na Π_2 !



Sl.322.



Sl.323.

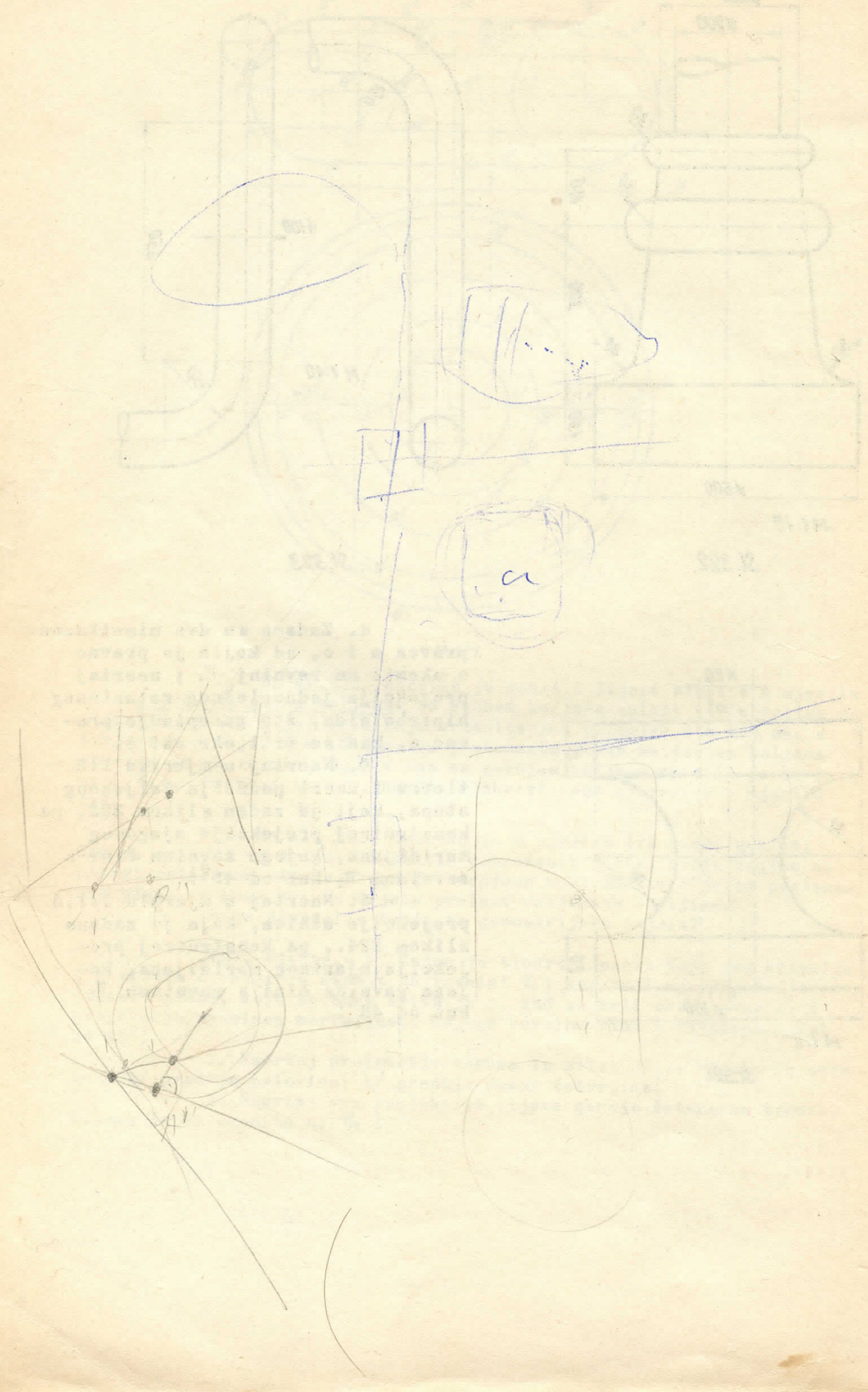


Sl.324.

4. Zadana su dva mimoilazna pravca a i o, od kojih je pravac o okomit na ravnini Π_1 ; nacrtaj projekcije jednoplošnog rotacionog hiperboloida, što ga opisuje pravac a, kad se vrti oko osi o!

5. Nacrtaj u mjerilu 1:5 tlocrt i nacrt podnožja željeznog stupa, koji je zadan slikom 322, pa konstruiraj projekcije njegovog meridijana, kojega ravnina čini s ravninom Π_2 kut od 45^0!

6. Nacrtaj u mjerilu 1:1,5 projekcije užnice, koja je zadana slikom 324., pa konstruiraj projekcije njezinog meridijana, kojega ravnina čini s ravninom Π_2 kut od 45^0!


a
A'
A''